

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кваліфікаційна наукова праця

На правах рукопису

МАЛОЄД МАРИНА МИКОЛАЇВНА

УДК 681.513:517.938(043.5)

ДИСЕРТАЦІЯ

**АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ
СТАБІЛІЗАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

05.13.12 – системи автоматизації проектувальних робіт

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
М.М. Малоєд

Науковий керівник Синєглазов Віктор Михайлович

доктор технічних наук, професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Малоєд М.М. Автоматизоване проектування оптимальних систем стабілізації нелінійних динамічних об'єктів. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.13.12 «Системи автоматизації проектувальних робіт». - Національний авіаційний університет. МОН України, Київ, 2019.

Створення гарантовано конкурентоздатних систем стабілізації руху складних багатовимірних об'єктів, у тому числі нестійких, з мінімальними втратами на проектування є однією з головних вимог досягнення успіху на ринку такого класу пристроїв. Одним з найбільш ефективних і перевірених шляхів виконання такої умови при створенні, зокрема, авіаційної та космічної техніки є застосування експериментально-аналітичного підходу до проектування оптимальних систем стабілізації складних об'єктів.

Цей підхід передбачає виконання декількох взаємопов'язаних етапів проектувальних робіт:

1. Експериментальне дослідження динаміки векторів сигналів "вхід-вихід" моделі об'єкта управління в реальних умовах функціонування.
2. Виконання структурної та/або параметричної ідентифікації моделей динаміки рухомого об'єкта на основі одержаних характеристик векторів сигналів "вхід-вихід".
3. Визначення оптимальної структури і параметрів багатовимірного регулятора на основі застосування сучасних методів синтезу оптимальних багатовимірних систем стабілізації до результатів ідентифікації моделі об'єкта управління.
4. Аналіз границь якості стабілізації математичної моделі об'єкта, що входить до складу оптимальної системи стабілізації, в реальних умовах функціонування.
5. Розробка технічної пропозиції на створення нової або на модернізацію існуючої системи стабілізації багатовимірного рухомого об'єкта управління.

Успішне застосування такого підходу визначається, з однієї сторони, відповідністю алгоритмів ідентифікації, синтезу і аналізу моделі до реальних умов функціонування об'єктів управління і особливостей їх динаміки, а з іншої – наявністю системи комп'ютерної математики, зокрема MatLab, яка дозволяє застосувати синтезовані алгоритми для автоматизованого проектування оптимальних систем автоматичного управління.

Трьом останнім пунктам цього підходу й присвячені дослідження, результати яких викладені в роботі, що пропонується. Основна увага в ній приділяється третьому пункту.

У процесі виконання досліджень були отримані нові наукові результати, які можна використовувати для створення систем автоматизованого проектування (САПР) регуляторів для нелінійних об'єктів:

- Вперше проведено детальний аналіз усіх шести методів прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації (ПЖС НСС) і сформульовано рекомендації щодо можливостей та доцільності використання кожного з них, при цьому конструктивними виявились лише 1-й, 2-й та 6-й методи. Ці методи реалізують четвертий напрямок у теорії стабілізації нелінійних систем, що був запропонований С.М. Онищенком у 90-і роки. Три попередні напрямки (монотонна стабілізація, стабілізація за лінійним наближенням та стабілізація за лінійним зв'язком матриці керування з матрицею коефіцієнтів квадратичної форми – функції Ляпунова) мають певні недоліки. Цей же напрямок жорсткої стабілізації відзначається тим, що не потребує забезпечення обов'язкових умов додатної визначеності матриці коефіцієнтів квадратичної форми (вони виконуються автоматично), має досить просту процедуру синтезу регулятора стабілізації та зручне забезпечення умов стабілізації.

- За критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського вперше запропонована і досліджена процедура синтезу оптимального управління нелінійними об'єктами методами ПЖС. До цього методи ПЖС НСС не були оптимізовані, а критерій О.А. Красовського не знаходив широкого застосування, бо потребував асимптотичної стійкості розімкнутої системи об'єкта. Разом з методами ПЖС НСС цей критерій дозволив будувати

оптимальний регулятор без інтегрування як рівняння Ріккати, так і рівняння Ляпунова, що значно спрощує процедуру синтезу системи оптимальної стабілізації об'єкта.

- Вперше повністю й детально досліджено шостий метод жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації з верхньою матрицею коефіцієнтів квадратичної форми - функції Ляпунова. До того частково досліджувалися 1-й метод і 6-й (лише для лінійних нестационарних систем, канонічних за керуванням). У результаті проведених досліджень показано, що 6-й метод ПЖС НСС можна успішно застосовувати й для стабілізації нелінійних систем.

- Побудована модель кутового руху штучного супутника Землі (ШСЗ) з чотирма маховиками як керуючими органами, вперше синтезовано стабілізуюче та оптимальне стабілізуюче управління його кутовою орієнтацією 6-м методом ПЖС НСС та проведено математичне моделювання його руху в середовищі MatLab. До цього методи ПЖС НСС для стабілізації ШСЗ не застосовувалися.

- Вперше побудовано 6-м методом ПЖС НСС асимптотично стійкий спостерігач похибок спостереження стану ШСЗ за магнітометричною і швидкісною інформацією з датчика кутової швидкості (ДКШ) в умовах невизначеності, досліджено стабілізацію ШСЗ з використанням цієї інформації та проведено математичне моделювання його руху в середовищі MatLab. Запропонований та досліджений при цьому новий підхід до використання процедури стабілізації системи похибок спостереження стану ШСЗ не має аналогів.

- Для нелінійної моделі математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегральним керуванням вперше побудовано шостим методом ПЖС НСС оптимальне стабілізуюче управління з критерієм якості О.А. Красовського, проведено всебічне моделювання руху маятника в середовищі MatLab та виконано порівняння одержаних результатів з результатами М.М. Красовського з оптимальної стабілізації такого ж математичного маятника, але за лінійним наближенням; синтезований в

дисертаційній роботі оптимальний регулятор для нелінійного варіанту покращує якість стабілізації математичного маятника в середньому на 50 %;

- Проаналізовано математичну модель автоматичного регулятора підсилення (АРП), для якої шостим методом ПЖС НСС вперше розв'язано задачу стабілізації вихідної напруги шляхом синтезу закону управління і проведено комп'ютерне моделювання цієї системи в середовищі MatLab, яке показало доцільність застосування знайденого закону управління з метою одержання постійної заданої напруги на виході АРП.

- Отримані в роботі нові результати із стабілізації та оптимальної стабілізації новими методами ПЖС НСС кутової орієнтації ШСЗ та похибок спостереження його стану, оптимальної стабілізації математичного маятника у верхньому положенні рівноваги й стабілізації заданої напруги на виході АРП дозволили вперше успішно створити базу даних САПР, структура якої забезпечує автоматизоване проектування систем стабілізації:

- космічних об'єктів будь-якого призначення;
- багатоланкових математичних маятників у верхньому положенні рівноваги, математичні моделі яких подібні до моделей багатопротяжних трубопроводів з газу, нафто та водо наповненням – їх проблеми зараз дуже актуальні;
- постійної заданої напруги на виході АРП різної природи.

Автоматизоване проектування систем стабілізації подібних складних об'єктів призване підвищувати точність і надійність їх функціонування, здешевлювати їх розробку та проектування.

Практичне значення одержаних результатів вбачається в їх використанні в процедурах САПР, в учбовому процесі НАУ в курсах: теорії оптимального управління механічними системами, основи комп'ютерного проектування, математичне моделювання систем та процесів та в публікації результатів досліджень у наукових виданнях.

Ключові слова: оптимізація, оптимальне управління, стабілізація, методи прямого жорсткого синтезу (ПЖС), жорстка стабілізація, математичне

моделювання, математичний маятник, штучний супутник Землі, спостереження в умовах невизначеності.

Список публікацій здобувача:

1. Сусол М.Н. Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к нелинейным объектам / С.М. Онищенко, Н.П. Коваленко, М.Н. Сусол // Проблеми інформатизації та управління. К. НАУ, 2005. – Вип. 2(13). – С. 73–77.

2. Сусол М.Н. К проблеме стабилизации нелинейных систем / М.Н. Сусол // V Международная НТК "Гиротехнологии, навигация и управление движением": Сборник докладов. К.: – НТУУ "КПИ", 2005. – С. 327–334.

3. Сусол М.Н. Анализ алгоритмов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / Е.Л. Клименко, Н.П. Коваленко, С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // Проблемы управления и информатики. – 2006 – №4 – С. 30–39.

4. Сусол М.Н. Анализ методов прямого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / Е.Л. Клименко, Н.П. Коваленко, С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // VIII Крымская международная математическая школа. "Метод функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь: ТНУ, 2006 – С.80.

5. Сусол М.Н. Анализ условий стабилизируемости нелинейных систем шестым алгоритмом синтеза / М.Н. Сусол // Матеріали Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених „Політ–2006”. – К:НАУ. – 2006. – С. 200.

6. Сусол М.Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // Thesis of International Conference “Dynamical System Modeling and Stability Investigation” / May 22 – 25, 2007. – К.: КНУ. – 2007. – С. 76.

7. Малоед М.Н. Методы жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации и их аддитивная оптимизация / М. Н. Малоед // Материалы X Международной конференции (5 – 10 июня 2008 года) «Устойчивость, управление и динамика твердого тела». – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ. – 2008. – С. 135 – 136.

8. Малоед М.Н. Жесткие методы оптимальной стабилизации нелинейных систем / М.Н. Малоед // Материалы IX Крымской Международной математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Таврический национальный ун-т. – Симферополь. – 2008. – С. 111.

9. Малоед М.М. Адитивна оптимальна стабілізація нелінійних систем методами жорсткого синтезу / М.М. Малоед // Автоматика–2008: доповіді XV міжнародної конференції з автоматичного управління, 23 – 26 вересня 2008 р. – Одеса: ОНМА. – С. 858–861.

10. Малоед М.Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных динамических систем /М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Збірка доповідей VII Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки» / 23-24 квітня 2009 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2009. – С. 145 – 151.

11. Малоед М.М. Стабілізація нелінійних систем оптимальними методами прямого жорсткого синтезу / М.М. Малоед, С.М. Онищенко // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6, №3. – С. 169 – 177.

12. Малоед М.Н. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Проблеми аналітичної механіки / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т.7, №3. – С. 330 – 344.

13. Малоед М.М. Оптимізація стабілізуючого управління математичним маятником / М.М. Малоед // Електроніка та системи управління. – К. : НАУ – 2011. – №1(27). – С. 78–83

14. Малоед М.М. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем положении равновесия / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // International Conference “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”: Thesis of Conference Report / May 25 – 27, 2011. – К.: КНУ.– 2011. – С. 375.

15. Малоед М.М. Оптимальна стабілізація супутника / М.М. Малоед // Проблеми інформатизації та управління. К.: НАУ . – № 3(35). – 2011. – С. 68–76.

16. Малоєд М.М. Побудова оптимального управління супутником / М.М. Малоєд, С.М. Онищенко // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 21–22 листопада 2011 р., м. Київ. – К.: НАУ, 2011. – С. 75.

17. Малоєд М.М. Моделювання автоматичного регулятора підсилення / М.М. Малоєд // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 28-29 листопада 2012 р., м. Київ. . – К.: НАУ, 2012. – С. 57.

18. Малоєд М.Н. Математическое моделирование автоматического регулятора усиления с обратной связью / М.Н. Малоєд, И.Г. Прокопенко // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 28-30 листопада 2012 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2012. – С. 77.

19. Малоєд М.М. Спостереження стану штучного супутника Землі «Січ-2» / М.М. Малоєд, С.М. Онищенко // Збірка доповідей ІХ Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки» / 17-18 квітня 2013 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2013. – С. 112 – 121.

20. Малоєд М.М. Дослідження проблеми спостереження стану штучного супутника Землі / М.М. Малоєд // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 17-19 листопада 2014 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2014. – С. 85.

21. Малоєд М.М. Дослідження проблеми спостереження вектора стану нелінійної динамічної ситеми / М.М. Малоєд // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 21-23 листопада 2018 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2019. – С. 42.

Матеріали конференцій:

Основні результати і положення роботи доповідались і обговорювались на V Міжнародній НТК "Гіротехнологии, навигация и управление движением" (Київ, НТУУ "КПІ", 2005), на VIII Кримській міжнародній математичній школі "МФЛ-2006: Метод функций Ляпунова и его приложения" (Крим, Алушта, 2006 р.), на засіданнях студентської секції Міжнародної НТК "Політ - 2005" і "Політ - 2006" (Київ, НАУ, 2005 р., 2006 р.), на Міжнародній конференції "Dynamical System Modeling and Stability Investigation": Травень 22 – 25, 2007 та 2011 (Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 2007 р., 2011 р.), на X Міжнародній конференції «Устойчивость, управление и динамика твердого тела»: Червень 5-10, 2008 р. (Донецьк, Ін-т прикладної математики і механіки НАНУ, 2008 р.), на IX Кримській міжнародній математичній школі «МФЛ-2008» (Тавридський нац. ун-т, Сімферополь, 2008), XV Міжнародній конференції з автоматичного управління «Автоматика-2008» (Одеса, ОНМА, 23-26 вересня 2008 р.), VII НТК «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки» (Київ, НТУУ «КПІ», 2009 р.), на Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених та студентів «Проблеми навігації і управління рухом» (Київ, НАУ, 21-22 листопада 2011 р.), НТК «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM» (Київ, НАУ, 28-30 листопада 2012 р.), на Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених та студентів «Проблеми навігації і управління рухом» (Київ, НАУ, 28-29 листопада 2012 р.), IX НТК «Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки» (Київ, НТУУ «КПІ», 17-18 квітня 2013 р.), НТК «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM» (Київ, НАУ, 17-19 листопада 2014 р.), НТК «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM» (Київ, НАУ, 21-23 листопада 2018 р.), на наукових семінарах у відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України, на кафедрі авіаційних комп'ютерно-інтегрованих комплексів Навчально-наукового інституту інформаційно-

діагностичних систем та на кафедрі авіаційних радіоелектронних комплексів навчально-наукового інституту аеронавігації, електроніки та телекомунікацій Національного авіаційного університету.

ANNOTATION

Maloyed M.M. Automated design optimal systems stabilization of nonlinear dynamic objects. - Qualification scientific work with the manuscript copyright.

A dissertation for the degree of a Candidate of Engineering Sciences in the specialty 05.13.12 - «Systems automation of design works». - National Aviation University, Ministry of Education and Science of Ukraine. Kyiv, 2019.

Creation of guaranteed competitive stabilization systems for complex multidimensional objects, including unstable, with minimal design losses, is one of the main requirements for achieving success in the market for such a class of devices. One of the most effective and proven ways to implement such a condition when creating, in particular, aviation and space technology is the application of experimental and analytical approach to designing optimal systems for stabilizing complex objects.

This approach involves the implementation several interrelated stages of design work:

1. Experimental research of the dynamics of the vector of signals "input-output" models of the object of control in real conditions of functioning.

2. Implementation of structural and / or parametric identification models of the dynamics a moving object on the basis of the received characteristics the vector signals "input-output".

3. Determination the optimal structure and parameters of the multidimensional regulator on the basis the application of modern methods synthesis of optimal multidimensional stabilization systems to the results of identification the model of the control object.

4. The analysis of the quality boundaries the stabilization of the mathematical model an object, which is part of the optimal system of stabilization, in real conditions of functioning.

5. Development of a technical proposal for the creation of a new or for modernization of the existing stabilization system of a multidimensional moving object of management.

The successful application of this approach is determined, on the one hand, by the matching algorithms of identification, synthesis and analysis of the model to the real conditions of the functioning of control objects and their dynamics, and on the other - the presence of a computer mathematics system, in particular MatLab, which allows the application of synthesized algorithms for automated design of optimal automatic control systems.

The last three points of this approach are devoted to research, the results of which are set out in the proposed work. The main attention is on the third point.

In the process of research implementation were obtained new scientific results that could be used to create automated design systems (CAD) for nonlinear objects:

- For the first time, a detailed analysis of all six methods of direct hard synthesis of nonlinear stabilization systems (DHS NSS) has been carried out and recommendations on the possibilities and feasibility of using each of them have been formulated, with only the 1st, 2nd and 6th methods being constructive. These methods implement the fourth direction in the theory of stabilization of nonlinear systems, which was proposed by S.M. Onishchenko in the 90's. The three previous directions (monotone stabilization, stabilization by linear approximation, and stabilization by the linear coupling of the matrix of control with a matrix of coefficients of a quadratic form - Lyapunov functions) have certain disadvantages. The same direction of rigid stabilization is noted by the fact that it does not require the provision of mandatory definiteness of the matrix of quadratic coefficients (they are performed automatically), has a fairly simple procedure for synthesizing the stabilizer and comfortable stabilization conditions.

- By criterion of generalized work O.A. Krasovskii proposed for the first time the procedure of synthesis of optimal control of nonlinear objects by methods of

DHS. Prior to this, the methods of DHS NSS were not optimized, and the criterion O.A. Krasovskii did not find wide application, because he needed asymptotic stability of the open system of the object. Together with the methods of DHS NSS, this criterion allowed the construction of an optimal regulator without integrating both the Rikkati equation and the Lyapunov equation, which greatly simplifies the procedure for synthesizing the optimal object stabilization system.

- For the first time in full and in detail the sixth method of hard synthesis of nonlinear stabilization systems with the upper matrix of coefficients of a quadratic form - the Lyapunov function is investigated in full. Prior to that, the first method and the 6th (only for linear non-stationary systems, canonical control) were investigated partially. As a result of the conducted studies, it has been shown that the 6th method of PWC NSS can be used successfully for the stabilization of nonlinear systems.

- The model of the angular motion of an artificial satellite of the Earth (AHS) with four flywheels as controlling organs was constructed; for the first time, stabilizing and optimally stabilizing control of its angular orientation by the 6th method of DHS NSS was synthesized for the first time, and mathematical modeling of its movement in the MatLab environment was carried out. Prior to this, the methods of PWC NSS for stabilizing the AHS were not used.

- For the first time, the 6th method of DHS NSS was constructed as an asymptotically stable observing observer of the errors of monitoring of the state of the shock wave along the magnetometric and velocity information from the angular velocity sensor (AVS) under uncertainty, the stability of the AHS with the use of this information was investigated and a mathematical modeling of its motion in the MatLab environment was performed. Proposed and investigated with this new approach to the use of the procedure for stabilizing the system of errors in the monitoring of the state of the AHS has no analogues.

- For a nonlinear model of a mathematical pendulum in the upper (unstable) position of equilibrium with integral control, it was built for the first time by the sixth method of DHS NSS optimal stabilizing control with the quality criterion O.A. Krasovskii, a comprehensive modeling of the motion of the pendulum in the MatLab environment was carried out and a comparison of the results with the results of M.M.

Krasovskii with the optimal stabilization of the same mathematical pendulum, but with a linear approximation; synthesized in the dissertation, the optimal regulator for the nonlinear variant improves the quality of the stabilization of the mathematical pendulum by an average of 50% ;.

- The mathematical model of the automatic amplifier controller (AAC) is analyzed, for which the problem of stabilizing the output voltage by synthesis of the control law was solved for the first time by the sixth method of DHS NSS. The computer modeling of this system in the MatLab environment was performed, which proved the expediency of using the found control law for the purpose of obtaining constant voltage at the output of the AAC.

- The new results obtained from the stabilization and optimal stabilization of new methods of DHS NSS angular orientation of the AHS and the errors of observation of its state, optimal stabilization of the mathematical pendulum in the upper position of the equilibrium and stabilization of the given voltage at the output of the AAC allowed for the first time to successfully create a CAD database, the structure of which provides automated design of stabilization systems:

- space objects of any destination;
- Multilevel mathematical pendulums in the upper equilibrium position, mathematical models of which are similar to models of multi-line pipelines with gas, oil and water filling - their problems are now very relevant;
- the constant given voltage at the output of the ARP of different nature.

Automated designing of stabilization systems for such complex objects is intended to increase the accuracy and reliability of their operation, reduce their cost and design and design.

The practical significance of the results obtained is seen in their use in CAD procedures, in the teaching process of NAU in courses: the theory of optimal control of mechanical systems, the basis of computer design, mathematical modeling of systems and processes, and the publication of research results in scientific publications.

Key words: optimization, optimal control, stabilization, methods of direct hard synthesis (DHS), hard stabilization, mathematical modeling, mathematical pendulum, artificial earth satellite, observation under uncertainty.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	17
ВСТУП	18
Розділ 1. АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЕКТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ОБ'ЄКТІВ	27
1.1. Проблеми стабілізації нелінійних систем	27
1.2. Проблема автоматизованого проектування нелінійних систем	31
1.3. Структура САПР стабілізованих об'єктів	35
1.4. Структура дисертації	36
1.5. Висновки до розділу 1	42
Розділ 2. АНАЛІЗ ШЛЯХІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ СТОСОВНО ПОТРЕБ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ	43
2.1. Стабілізація динамічних систем	43
2.2. Методи прямого синтезу систем стабілізації	47
2.3. Аналітична реалізація методів прямого синтезу	49
2.4. Висновки до розділу 2	62
Розділ 3. АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПРЯМОГО ЖОРСТКОГО СИНТЕЗУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ СТАБІЛІЗАЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В АВТОМАТИЗОВАНОМУ ПРОЕКТУВАННІ	65
3.1. Загальна характеристика методів прямого жорсткого синтезу систем стабілізації	65
3.2. Аналіз 1-го алгоритму жорсткого синтезу систем стабілізації для верхньої матриці D	69
3.3. Аналіз 2-го алгоритму для нижньої матриці D	70
3.4. Аналіз 2-го алгоритму для верхньої матриці D	70
3.5. Аналіз 3-го, 4-го і 5-го алгоритмів	71
3.6. Аналіз 6-го алгоритму для верхньої матриці D	73
3.7. Аналіз 6-го алгоритму для нижньої матриці D	73

3.8. Аналіз умов стабілізованості нелінійних систем	75
3.9. Оптимальна стабілізація нелінійних систем	79
3.10. Оптимальна стабілізація нелінійних систем за критерієм узагальненої роботи	83
3.11. Жорстка оптимальна стабілізація нелінійних систем	86
3.12. Запровадження САПР оптимальної стабілізації нелінійних систем	88
3.13. Висновки до розділу 3	89
Розділ 4 АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНО ЗАСТАБІЛІЗОВАНОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА	93
4.1. Стабілізація математичного маятника	93
4.2. Оптимальна стабілізація математичного маятника	97
4.3. Функціонування САПР оптимального стабілізатора математичного маятника	98
4.4. Математичне моделювання руху маятника	99
4.5. Порівняльний аналіз результатів моделювання руху математичного маятника з результатами М.М. Красовського	100
4.6. Стабілізація вихідної напруги в автоматичному регуляторі підсилення (АРП)	101
4.7. Висновки до розділу 4	106
Розділ 5. АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ РУХУ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	109
5.1. Штучні супутники Землі та області їх застосування	109
5.2. Порівняльний аналіз методів і пристроїв для стабілізації супутника	112
5.3. Стабілізація супутника маховиками	116
5.4. Стабілізація орієнтації супутника як динамічного об'єкта	123
5.5. Динаміка ШСЗ з маховиками	125
5.6. Динамічні рівняння системи маховиків	128

5.7. Оптимальне управління супутником	129
5.8. Функціонування САПР оптимальної стабілізації штучного супутника Землі	130
5.9. Математичне моделювання руху супутника	130
5.10. Проблеми спостереження вектора стану нелінійних динамічних систем	131
5.11. Стабілізація процедури спостереження нелінійних динамічних систем	138
5.12. Розв'язання задачі стабілізації спостерігачів стану нелінійних систем шостим алгоритмом ПЖС НСС	140
5.13. Магнітометрична система визначення параметрів сферичного руху космічного апарата	143
5.14. Спостереження стану штучного супутника Землі	145
5.15. Функціонування САПР стабілізації спостерігача стану штучного супутника Землі	150
5.16. Математичне моделювання похибок спостереження стану штучного супутника Землі	150
5.17. Висновки до розділу 5	152
ВИСНОВКИ	155
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	157

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АРП – автоматичний регулятор підсилення

ЕОМ – електронно-обчислювальна машина

ЖС – жорстка стабілізація

ІЛЛ – інерційна лінійна ланка

КА – космічний апарат

МЖС – модальний жорсткий синтез

ММ – математичні моделі

НМС – нелінійна модальна стабілізація

ННЛ – неінерційна нелінійна ланка

НСС – нелінійні системи стабілізації

ПЖС – прямий жорсткий синтез

САПР – системи автоматизованого проектування

ССЗ – системи супутникового зв'язку

СШСЗ – стаціонарні штучні супутники Землі

ТЗ – технічне завдання

ШСЗ – штучні супутники Землі

ВСТУП

Створення гарантовано конкурентоздатних систем стабілізації руху складних багатовимірних об'єктів, у тому числі нестійких, з мінімальними витратами на проектування є однією з головних вимог досягнення успіху на ринку такого класу пристроїв. Одним з найбільш ефективних і перевірених шляхів виконання такої умови при створенні, зокрема, авіаційної та космічної техніки є застосування експериментально-аналітичного підходу до проектування оптимальних систем стабілізації складних об'єктів.

Цей підхід передбачає виконання декількох взаємопов'язаних етапів проектувальних робіт:

1. Експериментальне дослідження динаміки векторів сигналів "вхід-вихід" моделі об'єкта управління в реальних умовах функціонування.

2. Виконання структурної та/або параметричної ідентифікації моделей динаміки рухомого об'єкта на основі одержаних характеристик векторів сигналів "вхід-вихід".

3. Визначення оптимальної структури і параметрів багатовимірного регулятора на основі застосування сучасних методів синтезу оптимальних багатовимірних систем стабілізації до результатів ідентифікації моделі об'єкта управління.

4. Аналіз границь якості стабілізації математичної моделі об'єкта, який входить до складу оптимальної системи стабілізації, в реальних умовах функціонування.

5. Розробка технічної пропозиції на створення нової або на модернізацію існуючої системи стабілізації багатовимірного рухомого об'єкта управління.

Успішне застосування такого підходу визначається, з одного боку, відповідністю алгоритмів ідентифікації, синтезу і аналізу моделі до реальних умов функціонування об'єктів управління і особливостей їх динаміки, а з другого боку – наявністю системи комп'ютерної математики, зокрема MatLab, яка дозволяє застосувати синтезовані алгоритми для автоматизованого проектування оптимальних систем автоматичного управління.

Трьом останнім пунктам цього підходу й присвячені дослідження, результати яких викладені в роботі, що пропонується. Основна увага в ній приділяється третьому пункту – Визначення оптимальної структури і параметрів багатовимірного регулятора на основі використання сучасних методів синтезу оптимальних багатовимірних систем стабілізації до результатів ідентифікації моделі об'єкта управління та застосування САПР до розв'язання проблеми.

Актуальність теми дослідження. В зв'язку з постійним розширенням сфер використання штучних супутників Землі (ШСЗ) сьогодні зростає потреба в автоматизованому проектуванні подібних до них високоефективних систем. Ця потреба зумовлена, передусім, мінімізацією витрат на устаткування супутника, на виробництво його експериментальної моделі, на його експлуатацію та обслуговування при умові використання з максимальною ефективністю, наприклад, для моніторингу земної поверхні з космосу.

Космічні знімки з високими метричними властивостями знаходять широке використання при вирішенні проблем детальної картографії місцевості, збору та обробки інформації для дослідження ресурсів Землі, екологічного контролю, моніторингу надзвичайних ситуацій, для метеорологічних потреб тощо. Це один з напрямів застосування ШСЗ, що стрімко розвивається, причому важливим елементом його ефективного використання в процесі фотозйомки є можливість здійснювати точну орієнтацію космічного апарата (КА) шляхом його поворотів навколо центру мас відносно трьох ортогональних осей. Така організація керованого руху супутника суттєво ускладнює планування зйомки та управління засобами спостереження, але значно розширює можливості застосування КА. При цьому система його управління повинна забезпечувати як високу маневреність апарата, так і задовольняти вимоги надзвичайно високої точності стабілізації кінематичних параметрів його руху. Тому розв'язана в роботі задача стабілізації та оптимальної стабілізації руху ШСЗ шляхом *автоматизованого проектування є актуальною.*

Проблеми проектування, аналізу, синтезу та оптимізації руху космічних об'єктів, їх оптимального управління та імітаційного моделювання,

вимірювання параметрів і обробки сигналів вирішує багато наукових колективів і окремих вчених як в нашій країні, так і за кордоном. Широко відомі роботи В. Азарскова, Б. Банді, Л. Блохіна, В. Волосова, В. Зубова, В. Ігнатова, І. Куценка, В. Кунцевича, В. Ларіна, Д. Лебедева, О. Лєтова, І. Прокопенка, В. Синєглазова, А. Туніка, О. Ткаченка, В. Харченка, О. Яковлева, S. Barnett, S. Dodds, R. Kalman, V. Klein, Y. Ku, R. Moore, A. Walleer та багатьох інших.

Проблема *оптимальної* стабілізації та керування (управління) системами (об'єктами) виникає при обмежених енергетичних ресурсах, коли реалізація управління певної потужності, необхідної для переводу об'єкта з однієї точки простору в іншу або, зокрема, для точної стабілізації системи, виявляється неможливою. При цьому доводиться миритися або із залишковими похибками стабілізації, або з переходом об'єкта не в задану точку, а в її приблизний окіл.

Проблема забезпечення найкоротшого шляху чи найменшого часу реалізації руху об'єкта принципово не відрізняється від проблеми з його обмеженою енергетикою: в усіх задачах оптимізації кількісна характеристика ступеня досягнення чи встановлення компромісу між енергетичними витратами і величинами залишкових похибок у системі неможлива без критерію якості, найчастіше інтегрального квадратичного, мінімум якого й повинне забезпечувати оптимальне управління – найкраще для заданого критерію.

Методи жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації були запропоновані С.М. Онищенком на початку 90-х років минулого сторіччя, але оптимізація синтезованого ним закону управління не була реалізована. Тому дослідження цього питання давно назріло і є *актуальним*.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Наукові дослідження проводилися згідно з темою №396 Д-07 “Методика побудови комплексної навігаційної системи на основі спрощеного варіанту безплатформної інерціальної та високоточної супутникових систем” плану наукових робіт кафедри авіаційних комп'ютерно-інтегрованих комплексів

Факультету аеронавігації, електроніки та телекомунікацій Національного авіаційного університету.

Основні наукові результати отримано в рамках таких науково-дослідних робіт: 1) Кафедральна НДР № 761-ДБ-11 «Стійкі методи і алгоритми обробки сигналів в інформаційно-вимірювальних системах»; 2) Кафедральна НДР № 75 /22.01.03 «Інформаційні технології в системах радіотехнічного забезпечення польотів»; кафедри авіаційних радіоелектронних комплексів Факультету аеронавігації, електроніки та телекомунікацій Національного авіаційного університету; 3) Держбюджетна НДР № 245-ДБ 19.

Мета і завдання дослідження. *Мета дослідження* – підвищення точності стабілізації нелінійних об'єктів шляхом автоматизованого проектування структури оптимальних за квадратичним критерієм якості їх регуляторів, синтезованих методами прямого жорсткого синтезу стабілізованих нелінійних систем.

Для досягнення мети дослідження необхідно було розглянути такі *задачі*:

- ❖ запропонувати нову структуру САПР стабілізуючих регуляторів із застосуванням методів ПЖС НСС для нелінійних об'єктів;
- ❖ проаналізувати можливі шляхи стабілізації нелінійних динамічних систем;
- ❖ завершити дослідження методів прямого жорсткого синтезу (ПЖС) нелінійних систем стабілізації (НСС);
- ❖ розв'язати задачу оптимізації законів управління і стабілізації, синтезованих методами ПЖС;
- ❖ розробити САПР для оптимальної стабілізації штучного супутника Землі та математичного маятника;
- ❖ побудувати систему автоматизованого проектування оптимального регулятора стану ШСЗ в умовах невизначеності із застосуванням асимптотично стійкого спостерігача його положення

Об'єкт дослідження – проблеми оптимального управління і стабілізації нелінійних динамічних систем.

Предмет дослідження – автоматизоване проектування оптимальних

регуляторів для стабілізації нелінійних систем в умовах невизначеності методами ПЖС НСС.

Для розв'язання поставлених задач використовувались *методи* системного аналізу, теорії управління та оптимізації, другий метод Ляпунова, метод кососиметризації матричного рівняння Ляпунова. Комп'ютерне моделювання виконувалося в середовищі MatLab.

Наукова новизна одержаних результатів.

- Запропонована нова структура САПР, яка відрізняється від відомих тим, що містить блоки: структурного синтезу регулятора, параметричного синтезу регулятора, оптимізації регулятора, математичного моделювання, аналізу результатів моделювання; що підвищує ефективність вирішення задач оптимальної стабілізації нелінійних систем.
- Вперше повністю й детально досліджено і розроблено шостий метод жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації з *верхньою* матрицею коефіцієнтів квадратичної форми - функції Ляпунова, який відрізняється від відомих тим, що реалізується на єдиному першому етапі з однією компактною умовою стабілізованості; що дозволяє успішно й легко застосовувати його для стабілізації нелінійних систем.
- За критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського вперше запропонована і досліджена процедура синтезу оптимального управління нелійними об'єктами методами ПЖС. До цього методи ПЖС НСС не були оптимізовані, а критерій О.А. Красовського не знаходив широкого застосування, бо потребував асимптотичної стійкості розімкнутої системи об'єкта. Разом з методами ПЖС НСС цей критерій дозволив будувати оптимальний регулятор без інтегрування як рівняння Ріккати, так і рівняння Ляпунова, що значно спрощує процедуру синтезу системи оптимальної стабілізації об'єкта.
- Вперше побудовано шостим методом ПЖС НСС оптимальне стабілізуюче управління математичним маятником, порівняно з результатами М.М. Красовського оптимальної стабілізації такого ж математичного маятника,

але за лінійним наближенням; синтезований в дисертаційній роботі оптимальний регулятор покращує якість стабілізації математичного маятника в середньому на 50 %.

- Вперше синтезовано стабілізуюче та оптимальне стабілізуюче управління кутовою орієнтацією штучного супутника Землі (ШСЗ) 6-м методом ПЖС НСС, яке дозволяє неперервно здійснювати корекцію кутової орієнтації супутника. До цього методи ПЖС НСС для стабілізації ШСЗ не застосовувалися.
- Вперше побудовано 6-м методом ПЖС НСС асимптотично стійкий спостерігач похибок спостереження стану ШСЗ за магнітометричною і швидкісною інформацією з датчика кутової швидкості (ДКШ) в умовах невизначеності, досліджено стабілізацію ШСЗ з використанням цієї інформації. Запропонований та досліджений при цьому новий підхід до використання процедури стабілізації системи похибок спостереження стану ШСЗ не має аналогів.
- Отримані в роботі нові результати із стабілізації та оптимальної стабілізації новими методами ПЖС НСС кутової орієнтації ШСЗ та похибок спостереження його стану, оптимальної стабілізації математичного маятника у верхньому положенні рівноваги й стабілізації заданої напруги на виході АРП дозволили вперше успішно створити базу даних САПР, структура якої забезпечує автоматизоване проектування систем стабілізації:
 - космічних об'єктів будь-якого призначення;
 - багатоланкових математичних маятників у верхньому положенні рівноваги, математичні моделі яких подібні до моделей багатопротяжних трубопроводів з газу, нафто та водо наповненням – їх проблеми зараз дуже актуальні;
 - постійної заданої напруги на виході АРП різної природи.

Автоматизоване проектування систем стабілізації подібних складних об'єктів призване підвищувати точність і надійність їх функціонування,

здешевлювати їх розробку та проектування.

Практичне значення одержаних результатів

Розроблені математичні моделі та методи можуть бути використані науково-дослідними та дослідно-конструкторськими організаціями та установами під час створення нових та вдосконалення існуючих систем автоматизованого проектування ШСЗ, а також в навчальних закладах для підготовки, перепідготовки та підвищення кваліфікації фахівців у галузі автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології.

Результати роботи отримали практичне втілення в процедурах САПР (Додаток 1), в учбовому процесі НАУ в курсах: теорії оптимального управління механічними системами, основи комп'ютерного проектування РЕА, математичне моделювання систем та процесів для студентів напряму 6.050901 «Радіотехніка» спеціальності 8.05090103 «Радіоелектронні пристрої системи та комплекси» (Додаток 2) та в публікації результатів досліджень у наукових виданнях.

Особистий внесок автора. В роботі автор самостійно дослідив шостий метод ПЖС нелінійних систем стабілізації з верхньою матрицею коефіцієнтів квадратичної форми і частково третій та п'ятий алгоритми, проаналізував можливі шляхи оптимізації методів ПЖС і розробив процедуру її реалізації з критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського.

В роботах [2-5] автору належать результати досліджень шостого методу ПЖС із верхньою матрицею коефіцієнтів квадратичної форми. В роботах [6-8] автору належать результати побудови оптимального управління для нелінійних систем стабілізації, а в роботах [9,10] – результати знаходження оптимального управління для математичного маятника. В роботі [11] автору належать результати побудови оптимального стабілізуючого управління ШСЗ. В роботі [173] автору належать результати побудови асимптотично стійкого спостережника стану ШСЗ в умовах невизначеності.

Апробація результатів дисертації. Основні результати і положення роботи доповідались і обговорювались на V Міжнародній НТК "Гиротехнологии, навигация и управление движением" (Київ, НТУУ "КПІ",

2005), на VIII Кримській міжнародній математичній школі "МФЛ-2006: Метод функций Ляпунова и его приложения" (Крим, Алушта, 2006 р.), на засіданнях студентської секції Міжнародної НТК "Політ - 2005" і "Політ - 2006" (Київ, НАУ, 2005 р., 2006 р.), на Міжнародній конференції "Dynamical System Modelling and Stability Investigation": Травень 22 – 25, 2007 та 2011 (Київ, КНУ ім. Тараса Шевченка, 2007 р., 2011 р.), на X Міжнародній конференції «Устойчивость, управление и динамика твердого тела»: Червень 5-10, 2008 р. (Донецьк, Ін-т прикладної математики і механіки НАНУ, 2008 р.), на IX Кримській міжнародній математичній школі «МФЛ-2008» (Тавридський нац. ун-т, Сімферополь, 2008), XV Міжнародній конференції з автоматичного управління «Автоматика-2008» (Одеса, ОНМА, 23-26 вересня 2008 р.), VII НТК «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки» (Київ, НТУУ «КПІ», 2009 р.), на Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених та студентів «Проблеми навігації і управління рухом» (Київ, НАУ, 21-22 листопада 2011 р.), НТК «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM» (Київ, НАУ, 28-30 листопада 2012 р.), на Всеукраїнській науково-практичній конференції молодих учених та студентів «Проблеми навігації і управління рухом» (Київ, НАУ, 28-29 листопада 2012 р.), IX НТК «Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки» (Київ, НТУУ «КПІ», 17-18 квітня 2013 р.), НТК «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM» (Київ, НАУ, 17-19 листопада 2014 р.), НТК «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM» (Київ, НАУ, 21-23 листопада 2018 р.), на наукових семінарах у відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України, на кафедрі авіаційних комп'ютерно-інтегрованих комплексів Навчально-наукового інституту інформаційно-діагностичних систем та на кафедрі авіаційних радіоелектронних комплексів Навчально-наукового інституту аеронавігації, електроніки та телекомунікацій Національного авіаційного університету.

Публікації. За темою дисертації автором опубліковано 21 наукову роботу, з них 6 статей [2, 4, 8, 9, 105, 106] – в спеціалізованих виданнях, що входять до переліку фахових видань ДАК МОН України для здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (серед них 1 – в міжнародному журналі [4]), 4 статті в збірниках праць міжнародних конференцій [3, 7, 84, 173] та 11 тез доповідей на міжнародних конференціях [5, 6, 10, 11, 76, 82, 83, 174, 175, 176, 177].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота містить вступ, 5 розділів, загальні висновки і список використаних джерел, що складається з 177 найменувань на 17 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 173 сторінки (7,2 авторських аркуша). Робота містить 27 малюнків на 20 сторінках, 4 таблиці на 4 сторінках, 8 додатків на 9 сторінках.

РОЗДІЛ 1

АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЕКТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ОБ'ЄКТІВ

1.1. Проблеми стабілізації нелінійних систем

Дослідження нелінійних систем є однією з найактуальніших задач техніки та теорії регулювання. Відмітимо декілька обставин, які призводять до необхідності розгляду нелінійних систем:

- ❖ Регулятори та об'єкти регулювання, як правило, нелінійні. Їх лінеаризація допустима лише при початковому (приблизному) розгляді й часто не відображає суттєвих особливостей системи. Наприклад, розрахунок стійкості автомата стабілізації кутового руху ракети з лінійним законом корекції проводиться в рамках лінійної теорії. При цьому нелінійності сервоприводу вважаються малими і не враховуються. Однак добре відомо, що ці нелінійності породжують автоколивання на частоті, близькій до частоти зрізу частотної характеристики розімкнутої системи. Це означає, що система, яка розглядається, є нелінійною, оскільки в лінійній системі автоколивань не буває в принципі. До того ж, автоколивання, які виникають в цій системі, становлять нормальний експлуатаційний режим і дозволяють технічно реалізовувати автоматичне налаштування коефіцієнта підсилення.
- ❖ При високих вимогах до точності керування об'єктом із суттєво змінними параметрами виявляється досить ефективним використання нелінійних коректуючих пристроїв. В цьому випадку використання релейних систем, систем зі змінною структурою, систем із самоналаштуванням коефіцієнта підсилення є важливим засобом стабілізації літальних апаратів в умовах швидкої зміни висоти та швидкості польоту.
- ❖ Часто керування складними системами реалізується введенням в контур керування цифрового комп'ютера. Однак комп'ютер може

працювати лише із сигналами, квантованими за рівнем і часом. Отже, наявність комп'ютера в контурі керування викликає появу нелінійностей, які враховують квантування за рівнем на вході та виході комп'ютера.

Математичною моделлю нелінійних механічних систем є нелінійне звичайне диференціальне рівняння (або система таких рівнянь). Їх дослідження чисельними методами в принципі не можуть забезпечити розв'язання таких необхідних для інженера задач, як виявлення загальних якісних закономірностей системи, її фізичних характеристик та врахувати вплив параметрів і структури керуючого пристрою на процес регулювання і на поведінку об'єкта.

Усі нелінійні об'єкти, як правило, нестійкі – будь-яке їх відхилення від положення рівноваги призводить до неповернення у вихідне положення, тому важливо зробити об'єкт стійким, використовуючи систему стабілізації. Розв'язання цієї задачі забезпечується побудовою спеціального стабілізуючого регулятора у зворотному зв'язку. Його синтез традиційно реалізується з використанням другого (або його ще називають *прямим*) метода Ляпунова, коли нелінійна матриця $A(x,t)$ коефіцієнтів математичної моделі об'єкта, замкнута за зворотним зв'язком стабілізуючим регулятором з матрицею підсилення C у вигляді $A-BC$, повинна задовольняти відоме матричне рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + D(A-BC) + (A-BC)^T D = -Q, \quad (1.1)$$

в якому D, Q – матриці коефіцієнтів квадратичних форм – функцій Ляпунова.

З цього рівняння треба визначити дві матриці: C і D , тому в загальному випадку задача синтезу матриці C здається погано обумовленою. Та до 90-х років минулого сторіччя вирішення цієї проблеми все ж було можливе на трьох напрямках:

- матриця D задається апріорі, тоді з рівняння Ляпунова визначається лише матриця C (монотонна стабілізація);
- матриця D знаходиться як розв'язок рівняння Ляпунова, записаного для лінійного наближення нелінійної системи в розімкнутому виді (це можливо лише при асимптотичній стійкості лінійного наближення

розімкнutoї системи), після чого вона вже як відома використовується в рівнянні Ляпунова для нелінійної системи, з якого вже визначається матриця C (стабілізація за лінійним наближенням);

- шукана матриця C лінійно зв'язується з матрицею D і після подання її у вигляді $C=KD$ перетворює рівняння Ляпунова на матричне рівняння Ріккати, що дозволяє також розв'язувати задачу оптимальної стабілізації.

В 90-х роках С.М. Онищенко запропонував *четвертий* підхід до розв'язання цієї проблеми, коли жорстко обмежується структура матриці $D = D_* D_*^T$ шляхом її параметризації довільною неособливою квазітрикутною нижньою (тоді і матриця D називається *нижньою*) чи верхньою (відповідно матриця D називається *верхньою*) матрицею D_* . Цей підхід реалізується декількома методами, які отримали назву методів *прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації* (ПЖС НСС) і дозволяють знаходити матрицю C з рівняння (1.1). Саме ці методи досліджуються і використовуються в дисертації при побудові САПР стабілізуючих регуляторів для таких нелінійних нестійких об'єктів, як:

- ❖ Математичний маятник у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегральним керуючим органом – нелінійна система третього порядку, яку, з одного боку, можна використати як ілюстрацію до успішного й ефективного застосування методів ПЖС НСС з оптимізацією побудованого керування, а з другого боку – як можливий інструмент застосування багатоланкових обернених математичних маятників для розв'язання задач стабілізації довгоперіодичних коливань трубопроводів великої протяжності, гасіння їх вібрацій та попередження резонансних режимів.
- ❖ Автоматичний регулятор підсилення (АРП) – необхідна складова багатьох приладів і систем, де потрібно забезпечувати стабілізацію напруги через одержання постійної заданої напруги на виході АРП.
- ❖ Штучний супутник Землі (ШСЗ) – у зв'язку з постійним розширенням сфер використання ШСЗ зростає потреба в автоматизованому

проектуванні цих високоефективних систем, що зумовлена, передусім, мінімізацією витрат на устаткування супутника, на виробництво його експериментальної моделі, на його експлуатацію та обслуговування при умові використання з максимальною ефективністю, наприклад, для моніторингу земної поверхні з космосу. Космічні знімки з високими метричними властивостями знаходять широке використання при вирішенні проблем детальної картографії місцевості, збору та обробки інформації для дослідження ресурсів Землі, екологічного контролю, моніторингу надзвичайних ситуацій, для метеорологічних потреб тощо. Це один з напрямів застосування ШСЗ, що стрімко розвивається, причому важливим елементом організації його ефективного використання в процесі фотозйомок є можливість здійснювати точну орієнтацію космічного апарата (КА) шляхом його поворотів навколо центру мас відносно трьох ортогональних осей. Така організація керованого руху супутника суттєво ускладнює планування зйомки та управління засобами спостереження, але значно розширює можливості застосування КА. При цьому система його управління повинна забезпечувати як високу маневреність апарата, так і задовольняти вимоги надзвичайно високої точності стабілізації кінематичних параметрів його руху.

Дослідження цих складних нестійких нелінійних систем супроводжується значними затратами часу та людських зусиль. Тому розв'язані в роботі задачі стабілізації та оптимальної стабілізації їх рухів шляхом автоматизованого проектування є актуальною і корисною.

З метою спрощення процесу виробництва вище розглянутих систем створюється САПР, яка:

- ✓ скорочує час проектування об'єкта;
- ✓ створює реальний нелінійний об'єкт у віртуальному просторі ПК;
- ✓ підвищує якість і точність його функціонування;
- ✓ зменшує витрати на виробництво, зокрема на його стендові та натурні випробування.

1.2. Проблеми автоматизованого проектування нелінійних систем

Серед усіх інформаційних технологій *автоматизація проектування* займає особливе місце. Це синтетична дисципліна, оскільки складається з цілого ряду сучасних інформаційних технологій:

- Так, *технічне обслуговування САПР* базується на основі експлуатації комп'ютерних мереж і телекомунікаційних технологій, причому САПР практикує використання персональних комп'ютерів і робочих станцій.
- Щодо *математичного забезпечення САПР*, то слід зазначити різноманітність методів, які при цьому використовуються: чисельні методи, методи математичного програмування, статистики, дискретної математики, штучного інтелекту.
- *Програмні комплекси САПР* можна порівняти з одними із найскладніших сучасних систем, в основі яких лежать такі операційні системи, як Windows, Unix, і такі мови програмування, як C, C++, Matlab і Java, а також сучасні CASE-технології.

Практично кожен інженер-розробник повинен володіти знаннями основ автоматизації проектування і вміти працювати із засобами САПР. Оскільки всі проектні підрозділи, офіси і конструкторські бюро мають комп'ютери, робота конструктора таким інструментом, як кульман або розрахунки за допомогою логарифмічної лінійки стали неактуальними. А отже, підприємства, які працюють без САПР, або які їх використовують недостатньо, стають не конкурентоздатними, оскільки витрачають на проектування значно більше часу і фінансових засобів.

Типи САПР [12]:

- ✓ Математичне забезпечення САПР (МЗ) — цей вид включає сукупність математичних методів, моделей та алгоритмів з метою виконання проектування;
- ✓ Лінгвістичне забезпечення САПР (ЛЗ) — це забезпечення представляє собою спілкування між проектувальниками і ЕОМ, яке виражене мовами обміну даних і мовами програмування між технічними засобами САПР;
- ✓ Технічне забезпечення САПР (ТЗ) — сюди відносяться периферійні пристрої, ЕОМ, лінії зв'язку, обробка і виведення даних тощо;

- ✓ Інформаційне забезпечення САПР (ІЗ) — складається з баз даних (БД), систем управління базами даних (СУБД) та інших даних, які використовуються при проектуванні;
- ✓ Програмне забезпечення САПР (ПЗ) — це, передусім комп'ютерні програми САПР;
- ✓ Методичне забезпечення САПР (МетЗ) — включає в себе різного роду методики проектування;
- ✓ Організаційне забезпечення САПР (ОЗ) — представляється штатними розписами, посадовими інструкціями та іншими документами, які визначають роботу проектного підприємства.

Класифікація САПР

САПР класифікують за *цільовим призначенням*, за *додатками*, *масштабом* і *характером базової підсистеми*.

За *цільовим призначенням* виділяють САПР або підсистеми САПР, які представляють різні аспекти проектування. Таким чином, САЕ/CAD/CAM системи з'являються в складі MCAD:

- САПР-Ф або САЕ (Computer Aided Engineering) системи. Тут мають на увазі САПР функціонального проектування;
- САПР-К — конструкторські САПР загального машинобудування, найчастіше їх називають просто САД-системами;
- САПР-Т — технологічні САПР загального машинобудування — АСТПП (автоматизовані системи технологічної підготовки виробництва) або системи САМ (Computer Aided Manufacturing).

За *додатками* самими важливими та широко використовуваними вважаються такі групи САПР як:

- Машинобудівні САПР або MCAD (Mechanical CAD) системи — це САПР для застосування в областях загального машинобудування.
- ECAD (Electronic CAD) або EDA (Electronic Design Automation) системи — САПР для радіоелектроніки.
- САПР в області архітектури та будівництва.

Окрім цього існує багато більш спеціалізованих САПР, або ті, які виділяються в окремих групах, або є самостійною гілкою в класифікації. Це такі системи як ВІС-САПР (великих інтегральних схем) та САПР літальних апаратів і САПР електричних машин.

За масштабом визначають окремі програмно-методичні комплекси (ПМК) САПР:

- Комплекс аналізу міцності механічних виробів відповідно до методу кінцевих елементів (МКЕ);
- Комплекс аналізу електронних схем;
- Системи ПМК;
- Системи з унікальними архітектурами програмного (software) і технічного (hardware) забезпечень.

Класифікація за характером базової підсистеми:

- ✓ САПР, які направлені на додатки, де головною процедурою проектування є конструювання, тобто визначення просторових форм та взаємного розташування об'єктів. Це САПР на базі машинної графіки і математичного моделювання. До даної групи систем відноситься велика частина графічних середовищ САПР в сфері машинобудування.
- ✓ САПР орієнтовані на додатки, в яких при достатньо простих математичних розрахунках перероблюється велика кількість даних. Це САПР на базі СУБД. Ці САПР зустрічаються головним чином в техніко-економічних додатках, наприклад, в процесі проектування бізнес-планів, об'єктів, подібних щитам керування в системах автоматики.
- ✓ Комплексні (інтегровані) САПР, які включають сукупність попередніх видів підсистем. Типовими прикладами комплексних САПР можуть бути САЕ/CAD/CAM-системи в машинобудуванні або САПР ВІС. Таким чином, СУБД і підсистеми проектування компонентів, принципів, логічних і функціональних схем, топології кристалів, тестів для перевірки придатності виробів є складовою частиною САПР ВІС. Для того, щоб керувати складними системами використовують спеціалізовані системні середовища.

- ✓ САПР на базі певного прикладного пакету. По суті це вільно використовувані програмно-методичні комплекси, такі як, комплекс імітаційного моделювання виробничих процесів, комплекс синтезу і аналізу систем автоматичного управління, комплекс розрахунку міцності за методом кінцевих елементів тощо. Як правило, такі САПР відносяться до систем САЕ. Наприклад, програми логічного проектування на базі мови VHDL, математичні пакети типу MatLab.

Розвиток САПР

Одна з ключових тем розвитку САПР – «хмарні» розрахунки: віддалена робота з даними, розміщеними на віддалених серверах, з різних пристроїв, які мають вихід в Інтернет. На сьогоднішній день «хмари» суттєво просунулись в сегменті легких додатків і серверів – переважно в секторі користувача.

Можливі два варіанти інтеграції:

1. В першому випадку в «хмару» переноситься вся інфраструктура інженерних служб, і відповідно, необхідність в інженерному ПЗ, встановленому на робочому місці, зникає зовсім. В цьому випадку в конструктора як і раніше залишається графічна робоча станція зі встановленою САПР, але при цьому він отримує з неї доступ до різних «хмарних» сервісів, завдяки яким можна розв'язувати задачі, що вимагають дуже значних ресурсів (наприклад, проводити аналіз міцності). Здійснювати хмарну взаємодію можна двома способами: публічно, коли доступ до сервера, розташованому у провайдера, відкритий через Інтернет, і в приватному порядку, коли сервер знаходиться на підприємстві і звернення до нього відбувається через закриту локальну мережу. Хмари - це не лише нові технології, але ще й можливість експериментувати з новими бізнес-моделями.
2. Наступна важлива тенденція — альтернативні операційні системи (ОС). Ще п'ять років тому, коли йшлося про альтернативу Microsoft Windows, мова, як правило, йшла про Linux. Ця тема актуальна і сьогодні: вітчизняна національна програмна платформа очевидно буде зроблена на базі ядра Linux – до цієї ОС зростає інтерес в області освіти і в

держструктурах (є приклади успішного переходу). Однак тепер вже можна говорити про значний потенціал операційної системи Google Chrome OS. І тут вищезгаданий тренд з'єднується з хмарним трендом — ОС Google, як відомо, не має можливості встановлення додатків на локальному комп'ютері.

1.3. Структура САПР стабілізованих об'єктів

На рис. 1.1 представлена блочна структура САПР стабілізуючих регуляторів для нелінійних (і, зокрема, нестійких) об'єктів, яка відноситься до спеціалізованих САПР, в якій особлива увага приділяється *математичному забезпеченню* процедури синтезу систем стабілізації.

Вона починається блоком *технічного завдання* (ТЗ) замовника на розробку нового об'єкта (літака, штучного супутника Землі, автоматичного регулятора підсилення, математичного маятника тощо) з вимогами щодо точності його функціонування, надійності, захисту від збурень, енергетичних витрат тощо. Замовник може в ТЗ задавати математичну модель об'єкта, критерій оптимальності, який бажано мінімізувати, а також можливі датчики зовнішньої додаткової інформації для їх використання при розв'язанні задачі спостереження.

Якщо замовник в ТЗ не конкретизує функцію втрат (критерій якості), математичну модель об'єкта, датчики зовнішньої додаткової інформації, тоді треба звернутися до *бази даних* САПР (наступний її блок) і з переліку моделей, критеріїв, датчиків вибрати потрібні для подальшої процедури проектування. В базі даних знаходиться також перелік методів синтезу стабілізуючих пристроїв з їх характеристиками.

Після цього вже можна приступити до *структурного синтезу* стабілізуючого регулятора: вибору методу синтезу, найзручнішого для об'єкта, застосуванню цього методу до математичної моделі об'єкта, створенню структури замкнутої системи стабілізації. У роботі пропонується використовувати 6-й метод ПЖС НСС для всіх трьох нелінійних систем, що розглядаються. За необхідності в цьому блоці синтезується також система

спостереження похибок об'єкта. В дисертації вона реалізується шляхом стабілізації системи похибок спостереження за вектором стану ШСЗ «Січ-2» з використанням магнітометричної інформації та інформації з датчика кутової швидкості супутника.

Блок *параметричного синтезу* стабілізуючого регулятора потрібен для перевірки виконання умов стабілізації замкнутої системи об'єкта і встановлення граничних величин числових діапазонів його параметрів (коефіцієнтів математичної моделі об'єкта і стабілізуючого регулятора).

При обмежених енергетичних потужностях об'єкта виникає потреба в *оптимізації* розробленого стабілізуючого керування стосовно певного критерія якості. В роботі розробляється і пропонується процедура оптимізації з використанням квадратичного критерія узагальненої роботи О.А. Красовського без інтегрування рівнянь Ріккати чи Ляпунова.

Наприкінці можна приступити до *математичного моделювання* замкнутої системи об'єкта з використанням його числових параметрів, заданих в ТЗ. Моделювання всіх об'єктів у роботі виконується в середовищі програмування *MatLab*.

Результати математичного моделювання об'єкта далі порівнюються з його характеристиками, що містяться ТЗ, в блоці *аналізу результатів* проектування і якщо вони задовільні, то проектування вважається успішним. Якщо ж ні, то процедура проектування повертається до початку із змінами в блоках САПР.

1.4. Структура дисертації

Одне з пояснень суті *стабілізації* рухомих об'єктів є активне забезпечення стійкості їх рухів на заданих траєкторіях шляхом змінення структур об'єктів включенням їх стабілізуючих регуляторів у зворотний зв'язок.

Як вже зазначалося, практично всі рухомі об'єкти без керування нестійкі, а оскільки їх математичні моделі завжди нелінійні (перехід до відповідних лінійних структур супроводжується певною втратою їх властивостей), то стабілізація нелінійних систем стикається з великими труднощами.

Нагадаємо декілька відомих положень теорії стійкості руху механічних систем.

Для лінійних систем існує багато методів, які надійно визначають стійкість чи нестійкість об'єктів. Для нелінійних систем існує, на жаль, єдиний метод, що дозволяє при певних обставинах отримувати достатні умови їх стійкості (чи нестійкості). Це метод Ляпунова. Для його застосування треба взяти якусь додатну функцію Ляпунова (практично – це додатно визначена квадратична форма з матрицею коефіцієнтів D), обчислити її повну похідну на траєкторіях системи, що досліджується, і якщо ця похідна буде від'ємно визначеною квадратичною формою, тоді система буде асимптотично стійкою. Якщо ж додатно визначеною – система буде нестійкою. Якщо ж невизначеною, то про стійкість системи нічого конкретного сказати не можна, залишиться тільки надія, що з іншою квадратичною формою системі більш поталанить. При цьому зауважимо, що ця процедура з квадратичними формами в матричному вигляді зводиться до аналізу матричного рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + DA(x,t) + A^T(x,t)D = -Q. \quad (1.2)$$

Все це стосується визначення пасивної властивості системи – її стійкості.

Оскільки в цій процедурі беруть участь дві складові – система у вигляді її матриці коефіцієнтів $A(x,t)$ і квадратична форма з матрицею коефіцієнтів D , причому її ще треба вдало вибрати, то одразу ж напрошуються два можливі шляхи розв'язання цієї проблеми:

1. Можна намагатись якось підстроїти матрицю D , щоб напевно визначити стійкість системи. Для лінійних стаціонарних систем невисокого порядку – практично, не вище третього, – ця процедура ще можлива, наприклад [178]. Але для нелінійних систем цей шлях непридатний.
2. Можна втрутитись у структуру матриці $A(x,t)$, доповнюючи її структурою регулятора (стабілізуючого). В результаті отримаємо матрицю $A_* = A - BC$ (тут регулятор задається формулою $u = -Cx$). Якщо матрицю C якимсь чином синтезувати так, щоб задовольнялось рівняння (1.1), то це й буде *стабілізацією нелінійних систем*. Цей шлях дозволяє

активною дією змінювати властивості системи і з допомогою стабілізуючого регулятора перетворювати нестійкий об'єкт на стійкий. Тоді все зведеться до матричного рівняння Ляпунова (1.1), з якого треба визначити дві невідомі матриці C і D . І це, як вже зазначалося, можна зробити на трьох напрямках.

Згідно з першим з них в рівняння (1.1) підставляється якась додатно визначена матриця D і з нього знаходиться матриця C . Якщо обома цими матрицями рівняння (1.1) задовольняється, то система вважається застабілізованою, якщо ж ні – треба, як і в пасивному визначенні стійкості системи, повторювати цю процедуру з іншими матрицями D поки не поталанить застабілізувати систему. Неважко зрозуміти, що цей напрямок *монотонної стабілізації* аж занадто громіздкий та ненадійний. Він суттєво залежить від вдалого вибору матриці D .

Другий напрямок (більш поширений на практиці) зводиться до початкового визначення матриці D з матричного рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + DA_0 + A_0^T D = -Q, \quad (1.3)$$

аналогічного (1.2), але записаного для лінійного наближення нелінійної системи із стаціонарною лінійною матрицею A_0 . Це лінійне наближення повинно бути асимптотично стійким, щоб з рівняння (1.3) для заданої матриці Q можна було отримати розв'язок – додатно визначену симетричну матрицю D . Зрозуміло, що ця умова накладає на вихідну нелінійну систему досить суттєве обмеження: асимптотична стійкість лінійного наближення є достатньою умовою асимптотичної стійкості нелінійної системи, тобто цей шлях придатний лише для стійких об'єктів, для яких процедура стабілізації лише покращує їх стійкість, і цим шляхом неможливо перетворити нестійкий об'єкт на стійкий.

Нарешті, третій напрямок – у ньому матриця C виключається в рівнянні (1.1), бо лінійно зв'язується з матрицею D співвідношенням $C = KD$. Тоді лінійне (відносно D) рівняння Ляпунова перетворюється на нелінійне рівняння Ріккати, з яким мати справу набагато складніше, ніж з рівнянням (1.1). І хоча цей напрямок дозволяє додатково до розв'язання задачі стабілізації нестійких

об'єктів вирішувати проблему калмановської оптимізації регулятора, проте складність його застосування та громіздкість формул відлякують замовників і розробників нелінійних систем стабілізації. Тому цей метод не дуже поширений.

Варто нагадати, що донедавна в науці та техніці існували лише ці три напрями стабілізації нелінійних систем. У 90-х роках був запропонований *четвертий* підхід до розв'язання цієї проблеми з мультиплікативною параметризацією матриці D – прямий жорсткий синтез нелінійних систем стабілізації (ПЖС НСС).

Усі чотири напрями базуються на прямому методі Ляпунова, мають свої вади та позитивні сторони. Четвертий напрям як найновіший виявився найменш дослідженим і зацікавив деякими своїми перевагами над попередниками.

Як і в монотонній стабілізації, в ПЖС НСС теж задається матриця D , але вона не потребує виконання умов додатної визначеності – її симетричність та додатна визначеність гарантуються побудовою.

Досить просто аналітично визначається обернена матриця D^{-1} .

Процедура синтезу матриці підсилення C стабілізуючого регулятора в ПЖС НСС гарно вмотивована й логічно довершена, проте забезпечення умов стабілізації потребує в аналітичному варіанті значних затрат часу дослідника, а тому, мабуть, більш доречним буде використання для них символічної математики та методу Нелдера-Міда.

Взагалі, проблема синтезу стабілізуючого регулятора для нелінійних систем будь-яким методом з чотирьох зазначених вище напрямів для складних систем і об'єктів через значні затрати часу і людських зусиль доцільніше виконувати в САПР. Саме тому виявилось доречним поставити таку задачу: *розробити структуру САПР математичного забезпечення процедури синтезу стабілізуючого регулятора для складних динамічних нелінійних систем з використанням нових методів ПЖС НСС.*

Для розв'язання цієї задачі з метою створення бази даних САПР потрібно було проаналізувати існуючі методи синтезу стабілізаторів нелінійних систем на трьох попередніх напрямках: метод монотонної стабілізації, стабілізації за

лінійним наближенням, стабілізації з використанням матричного рівняння Ріккати – це виконано в розд. 2 роботи.

Показано, що метод монотонної стабілізації суттєво залежить від вдалого вибору матриці D коефіцієнтів квадратичної форми Ляпунова, що не робить його занадто популярним.

Стабілізація за лінійним наближенням потребує асимптотичної стійкості цього наближення, що еквівалентно асимптотичній стійкості відповідної нелінійної системи, тобто цим методом можна стабілізувати лише стійкі об'єкти, що далеко від універсальності та потреб техніки.

Стабілізація нелінійних систем з використанням нелінійного матричного рівняння Ріккати замість лінійного матричного рівняння Ляпунова хоча й дозволяє стабілізувати нестійкі об'єкти, проте розрахункові труднощі розв'язання нелінійних рівнянь Ріккати досить великі порівняно з розв'язанням лінійних рівнянь Ляпунова. Особливо це відноситься до найбільш важливих для практики задач високої розмірності нелінійних об'єктів і найбільш важкого випадку нетермінальних управлінь, коли гранична умова для шуканого розв'язку відсутня.

Стабілізації нелінійних систем новими методами четвертого напряму ПЖС НСС, зважаючи на перші публікації, потребувала глибоких досліджень їх властивостей та можливостей. Спочатку вважалось, що всі шість методів ПЖС НСС конструктивні та рівнозначні. Однак їх аналіз, виконаний в розд. 3, виявив серед них лише три конструктивні – 1-й, 2-й та 6-й. Особливо цікавим виявився шостий метод ПЖС НСС. Синтез стабілізуючого регулятора реалізується ним на єдиному першому етапі з однією компактною умовою стабілізованості, що дуже зручно. Цей метод допускає оптимізацію побудованого регулятора за критерієм (який, до речі, не працює з більшістю методів попередніх напрямів) узагальненої роботи О.А. Красовського без розв'язання не тільки матричного рівняння Ріккати, обов'язкового для всіх методів калмановської оптимізації, але й матричного рівняння Ляпунова, типового для задач стабілізації.

Таким чином, дослідження, виконані в розд. 3 роботи дозволили заповнити базу даних САПР нелінійних систем стабілізації та реалізувати

структурний синтез їх стабілізуючого регулятора, а аналіз умов стабілізованості визначив процедуру параметричного синтезу стабілізуючого регулятора для нелінійних систем.

Четвертий розділ присвячений розробці САПР нелінійної системи оптимальної стабілізації оберненого математичного маятника. До проведення досліджень цей маятник розглядався лише в лінійній постановці М.М. Красовським. У дисертації вперше для нелінійного варіанта оберненого математичного маятника шостим методом ПЖС НСС синтезований стабілізуючий регулятор, виконана його оптимізація за критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського, що підвищило точність його стабілізації майже на 50 % у порівнянні з попередніми результатами М.М. Красовського.

У цьому ж розділі запропонована й досліджена САПР стабілізуючого регулятора для АРП. В результаті вперше в нелінійній постановці шостим методом ПЖС НСС синтезований стабілізуючий регулятор для АРП, який продемонстрував високу точність стабілізації напруги на виході приладу. До цього подібна задача не розглядалася.

В п'ятому розділі містяться результати математичного забезпечення САПР нелінійної системи оптимальної стабілізації ШСЗ «Січ-2». Вперше для цього супутника шостим методом ПЖС НСС синтезований стабілізуючий регулятор його кутового руху з подальшою оптимізацією за критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського, а також вперше шостим методом ПЖС НСС синтезований стабілізуючий регулятор спостережника. До цього подібні дослідження «Січ-2» не проводилися. Створена для нього САПР може бути використана як САПР інших супутників, зокрема, «Січ-2М» тощо.

1.5. Висновки до розділу 1

1. У розділі пропонується, розробляється та досліджується структура САПР стабілізуючих регуляторів для нелінійних систем із застосуванням методів ПЖС НСС для нелінійних об'єктів. Оскільки дослідження складних нестійких нелінійних систем супроводжується значними затратами часу та людських зусиль, то з метою спрощення процесу їх

виробництва розроблено математичне забезпечення САПР, яка:

- скорочує час проектування об'єкта;
- створює реальний нелінійний об'єкт у віртуальному просторі ПК;
- підвищує якість і точність його функціонування;
- зменшує витрати на виробництво, зокрема на його стендові та натурні випробування.

2. Основними задачами методології проектування є зменшення числа ітерацій в його процесі, зниження витрат часу, зменшення вартості розробки проектів та підвищення їх якості. Проектування завжди переслідує певні конкретні цілі й головна з них – це одержати найкраще чи оптимальне (згідно з критерієм якості) рішення.

3. Подальше підвищення ступеня автоматизації проектування залежить від успіхів у розробці математичних моделей та алгоритмів процедур синтезу.

Результати даного розділу, а саме структура САПР, впроваджено у виробництво ПАТ «ЗАВОД ПІВДЕНКАБЕЛЬ» силових кабелів із ізоляцією із шитого поліетилену на напругу 6...330 кВ (Додаток 1).

РОЗДІЛ 2

АНАЛІЗ ШЛЯХІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ СТОСОВНО ПОТРЕБ САПР

2.1. Стабілізація динамічних систем

Управління динамічними системами на необмеженому інтервалі часу має ряд особливостей.

Виходячи з [14], розглянемо систему з управлінням

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

де $x \in \mathbf{R}_n$ – вектор стану, $u \in \mathbf{R}_m$ – вектор управління, $t \in \mathbf{T} = [0, \infty) \in \mathbf{R}_1$ – незалежна змінна (час), $f : \{f(x, t, u) / f(0, t, 0) = 0, \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_m \rightarrow \mathbf{R}_n\}$ – деяка вектор-функція, неперервна в точці $x = u = 0$, обмежена і кусково-диференційована в області визначення Ω , в якій вона задовольняє всі умови існування і однозначності розв'язків рівняння (2.1); *крапкою* позначена операція диференціювання за часом $t \in \mathbf{T} = [t_0, \infty) \subset \mathbf{R}_1$.

Управління u системою (2.1) шукається в класі обмеженого S -управління $u : \{u(x, t) / u(0, t) = 0, u \in U \subset \mathbf{R}_m\}$, де U – задана випукла множина з \mathbf{R}_m .

Звичайно виділяють три такі постановки задачі управління на необмеженому інтервалі часу [14]:

1. Побудувати S -управління $u = u(x, t)$, при якому система (2.1) стає асимптотично стійкою. Таке управління називається *стабілізуючим* (асимптотично стабілізуючим, експоненціально стабілізуючим, стабілізуючим у малому, у великому, в цілому тощо).
2. Знайти S -управління $u = u_0(x, t)$, яке мінімізує заданий критерій якості

$$I(u) = \int_0^{\infty} \omega(x, t, u) dt \rightarrow \inf, \quad (2.2)$$

причому $\omega : \{\omega(x(t), t, u(x, t)) / \omega > 0, \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_m \rightarrow \mathbf{R}_1\}$ – задана функція.

Управління $u = u_0$ в цьому випадку називається *оптимальним*. Однак не

завжди u_0 забезпечує замкнутій системі (2.1) асимптотичну стійкість. Це залежить від вибраного критерію якості (2.2).

3. Синтезувати управління $u = u(x, t)$, що мінімізує функціонал (2.2) і перетворює систему (2.1) в стійку. Задача стабілізації в цій постановці називається задачею *оптимальної стабілізації*, а отримане при її розв'язанні управління $u = u_*$ – *оптимальним стабілізуючим*. Як правило, u_* виявляється єдиним і якщо б функціонал (2.2) в кожній реальній задачі мав фізичний зміст, то однозначність управління u_* не мало б суттєвого недоліку. На жаль, критерій (2.2) для більшості задач досить слабо зв'язаний з їх фізичними характеристиками, тому бажано мати не одне управління u_* , а деяку їх множину. Не виходячи за рамки задачі оптимальної стабілізації, слід при цьому якось перетворити функціонал (2.2). Таким шляхом пішов О.М. Летов [15], що запропонував так звані *другорядні γ -критерії*, за які можна, наприклад, приймати час затухання перехідного процесу, максимально допустимі значення змінних стану системи, монотонність перехідного процесу, ступінь його гладкості, максимально допустимі значення управління тощо. Множину U_γ оптимальних управлінь $u = u_\gamma \in U_\gamma$, яка мінімізує відповідний γ -критерій, можна назвати γ -оптимальним стабілізуючим управлінням.

В дисертаційній роботі проводиться аналіз різних шляхів синтезу стабілізуючих управлінь і досліджується один із способів розв'язування задачі управління для досить великого класу нелінійних систем.

Прийнято вважати, що в основі задачі стабілізації незбурених рухів динамічних систем лежить проблема аналітичного конструювання регуляторів, поставлена О.М. Летовим [16].

Одне з можливих формулювань цієї задачі наведено у відомому додатку М.М. Красовського в книзі І.Г. Малкіна «Теория устойчивости движения» [17].

За Летовим [18], задачу стабілізації можна сформулювати як задачу синтезу асимптотично стійких систем наступним чином [19]: *із заданої*

множини U законів управління $u = u(x, t)$ необхідно виділити таку їх підмножину Φ , на якій незбурений рух системи буде асимптотично стійким рівномірно по x_0 і t_0 . Звичайно, при розв'язанні задачі стабілізації в кожному конкретному випадку можна асимптотичну стійкість, рівномірну по x_0 , t_0 , замінити на асимптотичну і, навіть, не асимптотичну стійкість, стійкість у великому, в цілому тощо, однак в усіх випадках досить ефективним методом розв'язання задач стабілізації виявляється другий метод Ляпунова, розповсюджений на них В.І. Зубовим [20].

Загальна, найбільш типова постановка задачі стабілізації і шлях її розв'язку представлені в роботі О.М. Лєтова [18].

Для нелінійної системи

$$\dot{x} = g(x, t) + B(x, t)u, \quad (2.3)$$

рівномірно асимптотично стійкої в розімкнутому стані, так, що для

$$\dot{x} = g(x, t) \quad (2.4)$$

існує функція Ляпунова $V(x, t)$, що задовольняє рівняння

$$\dot{V} = V'_t + V'_x g(x, t) = -\omega(x, t) \quad (2.5)$$

при умові

$$0 < \alpha(x) \leq V \leq \beta(x), \quad 0 < \gamma(x) \leq \omega(x, t),$$

необхідно синтезувати обмежене управління

$$|u(x, t)| \leq u_* = \text{const} > 0. \quad (2.6)$$

За його допомогою можна впливати на якість перехідного процесу.

Зажадавши, щоб повна похідна \dot{V} (2.5) вздовж будь-якої траєкторії системи (2.3) була негативно визначеною, отримаємо

$$\dot{V} = -\omega(x, t) + V'_x B(x, t)u < 0. \quad (2.7)$$

Нерівність (2.7) можна задовольнити, якщо прийняти

$$V'_x B(x, t)u \leq 0. \quad (2.8)$$

В цьому випадку в [18] був запропонований нелінійний закон управління

$$u = -u_* \text{sign} V'_x B(x, t), \quad (2.9)$$

з яким в системі

$$\dot{x} = g(x, t) - B(x, t)u_* \text{sign} V'_x B(x, t) \quad (2.10)$$

при строгому підході спостерігається неможливість руху через поверхні розриву

$$V'_x B = 0. \quad (2.11)$$

Звісно, в реальних механічних системах типу (2.10) з розривними управліннями (2.9) все ж має місце неперервність руху, зумовлена інерційністю.

Аналогічний підхід розглянутий Зубовим в роботі [21]. Він також легко проглядається і в роботах інших авторів, наприклад [22].

Розглянемо далі нелінійну систему вигляду

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.12)$$

з вектор-функцією $f \in L_1$ з класу L_1 функцій, що мають обмежені частинні похідні для всіх компонентів вектора стану $x \in \Omega \subset \mathbf{R}_n$ в області визначення Ω , причому $f : \mathbf{R}_n \times T \rightarrow \mathbf{R}_n$.

Система (2.12) може бути приведена до псевдолінійної матричної форми [23]

$$\dot{x} = A(x, t)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.13)$$

Для цього достатньо для вектор-функції f побудувати матрицю Якобі

$$J(x, t) = \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right], \quad k, j = \overline{1, n} \in \mathbf{N}, \quad (2.14)$$

в якій формально ввести деякий мультиплікативний параметр r , так що

$$x \rightarrow xr, \quad J(x, t) \rightarrow J(xr, t), \quad (2.15)$$

а тоді прийняти

$$A(x, t) = \int_0^1 J(xr, t) dr. \quad (2.16)$$

Легко впевнитись в справедливості тотожності

$$f(x, t) \equiv A(x, t)x, \quad (2.17)$$

яка дозволяє представити вихідну систему (2.12) в псевдолінійній формі (2.13).

Система (2.13) може бути апріорі нестійкою.

Ставиться задача: замкнути систему (2.13) (можливо нестійку) таким обмеженим C -управлінням

$$u = -C(x,t)x \in U \subset \mathbf{R}_m, \quad m \leq n, \quad (2.18)$$

з деякої випуклої множини U в \mathbf{R}_m , щоб замкнута система

$$\dot{x} = [A(x,t) - B(x,t)C(x,t)]x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.19)$$

стала рівномірно асимптотично стійкою [24].

Тут $B: \mathbf{R}_n \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_{n \times m}$, $m \leq n$, – відома матриця; $C: \mathbf{R}_n \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_{m \times n}$ – матриця, що потребує визначення (шукана).

Цю задачу можна розв'язати шляхом синтезу нелінійних систем стабілізації із застосуванням другого (прямого) методу Ляпунова [20, 25, 26].

При цьому слід зауважити, що в регуляторі (2.18) вектор x стану системи (2.13) вважається відомим і може бути використаний при синтезі управління, хоча принцип розподілу (згідно з яким задачі управління і спостереження розв'язуються незалежно одна від одної) абсолютно справедливий лише для лінійних систем, а в нелінійному випадку він строго не доведений. Проте на практиці ним часто користуються, особливо в системах у псевдолінійній матричній формі (2.13), і він приводить до цілком задовільних результатів.

Тому в дисертаційній роботі, за аналогією з численними авторами, результати яких розглядаються в цьому розділі, досліджується в загальному випадку розв'язання проблеми стабілізації нелінійних систем та їх оптимізація (розд. 3) без розгляду окремої задачі спостереження, яка спеціально досліджується в розд.5.

2.2. Методи прямого синтезу систем стабілізації

Розглянемо нелінійну систему (2.12) n -порядку, представлену в псевдолінійній формі (2.13) і замкнуту C -управлінням (2.18) m -го порядку у вигляді (2.19), яку назовемо *застабілізованою* [26], якщо для неї можна знайти стабілізуючу тріаду з C -управління (2.18) і двох позитивно визначених квадратичних форм V і W , причому V повинна допускати нескінченно малу верхню межу, а її повна похідна в часі t , знайдена на будь-якій траєкторії $x = x(t_0, x_0, t)$ замкнутої

системи (2.19), повинна бути від'ємно визначеною квадратичною формою, так що

$$\dot{V} = -W < 0 \quad (2.20)$$

для

$$V : V(x,t) = x^T D(t)x, \quad 0 < \alpha_1 x^T x \leq V(x,t) \leq \alpha_2 x^T x, \quad (2.21)$$

$$W : W(x,t) = x^T Q(x,t)x, \quad 0 < \beta(x)x^T x \leq W(x,t). \quad (2.22)$$

У співвідношеннях (2.21), (2.22) $D, Q : \{D(t), Q(x,t) / D^T = D : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_{n \times n}, D > 0 \ \forall t \in \mathbf{T};$

$$Q^T = Q : \mathbf{R}_n \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_{n \times n}, \quad Q > 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}_n, \forall t \in \mathbf{T},$$

$$\exists \alpha, \beta : \{\alpha_1, \alpha_2, \beta(x) / \alpha_s = \text{const} > 0 : \alpha_s \in \mathbf{R}_1^+, s = 1, 2; \beta \in \mathbf{H} : \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_1^+ \ \forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}_n, \},$$

причому β – функція класу \mathbf{H} за Ханом [27]: неперервна, строго зростаюча і задовольняє умову $\beta(0) = 0$ [28].

Можна стверджувати, що співвідношення (2.20), записане у вигляді

$$\dot{V} + W = 0, \quad (2.23)$$

допускає узагальнення на випадок *сильної* стійкості, коли

$$\dot{V} + W < 0, \quad (2.24)$$

причому тут також V і W – дві квадратичні форми з (2.21), (2.22) (W може бути формою псевдоквадратичною).

Нерівність (2.24) виявляється більш сильною умовою стійкості, ніж (2.20), і у вигляді

$$\dot{V} < -W < 0 \quad (2.25)$$

не зводиться до подібної умови від'ємної визначеності нестационарної квадратичної форми \dot{V} [29], оскільки в загальному випадку квадратична форма W може бути також *нестационарною*.

Диференціальна нерівність (2.25) як апарат дослідження стійкості руху систем використовується, головним чином, у *методі порівняння* [28, 30].

В частинному випадку, коли можна покласти

$$W = 2\alpha V, \quad (2.26)$$

нерівність (2.25) набуде вигляду

$$\dot{V} < -2\alpha V < 0, \quad (2.27)$$

а для рівності (2.20) відповідно отримаємо

$$\dot{V} = -2\alpha V < 0. \quad (2.28)$$

Вони застосовуються як головні інструменти розв'язання задачі експоненціальної [14, 31, 32] або α -стабілізації [33].

Якщо ж покласти

$$W = 0, \quad (2.29)$$

то умова (2.25) перетворюється на нерівність

$$\dot{V} < 0, \quad (2.30)$$

яка ефективно використовується в задачах *монотонної стабілізації*, а з (2.20) при цьому отримаємо умову

$$\dot{V} = 0 \quad (2.31)$$

неасимптотичної стійкості незбуреного руху механічних систем.

Зауважимо, що синтез систем експоненціальної стабілізації з (2.28) також приводить до умови, аналогічної (2.31).

Усі ці розглянуті випадки можна проілюструвати табл. 2.1.

Методи синтезу систем стабілізації, які побудовані на основі *прямого* методу Ляпунова з умов (2.20) або (2.25) для функцій Ляпунова загального виду або для квадратичних форм типу (2.21), (2.22) чи (2.26), (2.29), як правило, називають методами *прямого синтезу* систем стабілізації.

Вони полягають у побудові такої матриці управління C у (2.18), з якою матриця коефіцієнтів $A-BC$ замкнутої системи (2.19) буде задовольняти рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + D(A - BC) + (A - BC)^T D = -Q. \quad (2.32)$$

Управління (2.18) при цьому називають *допустимим*.

2.3. Аналітична реалізація методів прямого синтезу систем стабілізації

Синтез систем стабілізації, коли матриця B має обернену. Аналітична реалізація методів прямого синтезу залежить від властивостей матриці B .

При умові

$$B \in \mathbf{R}_{n \times n}, \text{ rang} B = n, \exists B^{-1}, \quad (2.33)$$

Таблица 2.1

	$W = x^T Qx > 0$	$W = 2\alpha V > 0$	$W = 0$
$\dot{V} + W < 0$	$\dot{V} < -W < 0$	$\dot{V} < -2\alpha V < 0$	$\dot{V} < 0$
$\dot{V} + W = 0$	$\dot{V} = -W < 0$	$\dot{V} = -2\alpha V < 0$	$\dot{V} = 0$

коли в замкнутій системі (2.19) матриця B неособлива і має обернену, розв'язок задачі прямого синтезу систем стабілізації краще здійснювати шляхом *кососиметризації рівняння Ляпунова* [34-36] (2.32), яке для цього випадку зручно записати в еквівалентному вигляді

$$\left[\frac{1}{2}(\dot{D}+Q)+D(A-BC)\right]+\left[\frac{1}{2}(\dot{D}+Q)+D(A-BC)\right]^T=0, \quad (2.34)$$

завжди можливо для будь-якого рівняння Ляпунова, враховуючи симетричність матриць \dot{D} і Q , а потім задовольнити його довільною кососиметричною матрицею S , поклавши

$$\left[\frac{1}{2}(\dot{D}+Q)+D(A-BC)\right]=\frac{1}{2}S^T, \quad (2.35)$$

після чого з (2.34), враховуючи (2.33), отримаємо

$$C=B^{-1}\left[A+\frac{1}{2}D^{-1}(\dot{D}+Q+S)\right]. \quad (2.36)$$

Управління (2.18) з матрицею C у вигляді (2.36) повністю розв'язує задачу стабілізації системи (2.19) з матрицею B типу (2.33) без жодних умов стабілізованості.

Синтез систем стабілізації, коли матриця B не має обернену. Якщо ж матриця B буде мати вигляд

$$B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}_{n \times m}, \quad B_2 \in \mathbf{R}_{m \times m}, \quad \text{rang } B_2=m < n, \quad \exists B_2^{-1}, \quad (2.37)$$

тоді розв'язок задачі прямого синтезу системи стабілізації також виявляється можливим методом кососиметризації рівняння (2.32). Але в цьому випадку з (2.35) будемо мати співвідношення

$$BC=A+\frac{1}{2}D^{-1}(\dot{D}+Q+S), \quad (2.38)$$

з якого неможливо отримати явний вираз матриці C , подібний до (2.36), через умову (2.37).

Тому здається, що в загальному випадку з *одного* рівняння Ляпунова (2.32) жодним з прямих методів синтезу неможливо отримати *дві* матриці – D і C .

Але ця проблема розв'язується декількома шляхами [26]. Розглянемо їх детальніше.

Монотонна стабілізація нелінійних систем, коли матриця D задається апіорі, як в задачах аналізу стійкості незбуреного руху динамічних систем.

Напевно, вперше задачу монотонної стабілізації поставила в 1968 році І.Є.Зубер [37] і дослідила її для дискретних стаціонарних (імпульсних) систем [37-39]. Після цього критерій монотонності як один з критеріїв стабілізації розглядався в роботах К.Д. Якубович [31-33], А.М. Мейлахса [40-44], Е.С. П'ятницького [45], О.С. Яковлєва [46-52] та інших авторів.

У роботах [31-33] застосовувалась експоненціальна стабілізація лінійних [31, 33] і нелінійних [32] систем автоматичного регулювання. В [33] були отримані необхідні та достатні умови розв'язання задачі α -стабілізації системи

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -Cx, \quad (2.39)$$

та був отриманий один з алгоритмів її розв'язання у випадку $\alpha > 0$. Для матриці C з (2.39) була запропонована формула

$$C = \lambda B^T D + U, \quad (2.40)$$

де $\lambda > \lambda_0 \in \mathbf{R}_1$ – довільне додатне число, яке задовольняє нерівність

$$\lambda DBB^T D - (DA + A^T D + 2\alpha D) > 0,$$

і $U \in \mathbf{R}_{m \times n}$ – довільна матриця, що задовольняє умову

$$UU^T < \lambda[\lambda DBB^T D - (DA + A^T D + 2\alpha D)].$$

Разом з тим були доведені необхідні та достатні умови стабілізації системи (2.39) управлінням $u = Tv$ у випадку, коли система (2.39) при $u = v = -Cx$ не є α -стабілізованою, і знайдені обмеження на величину довільної постійної матриці $T \in \mathbf{R}_{m \times m}$.

Робота [31] доповнювала результати, отримані в [33], і розповсюджувала їх на область оптимальної α -стабілізації лінійних стаціонарних систем із заданим критерієм якості

$$\delta(C) = \inf_{x \neq 0} [-(\dot{V} + 2\alpha V) / V], \quad (2.41)$$

де \dot{V} визначалась на траєкторіях системи (2.39).

Нарешті, в роботі [32] були сформульовані достатні умови розв'язання задачі α -стабілізації нелінійної системи вигляду

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(x, t), \quad u = -Cx, \quad y = h^T x, \quad (2.42)$$

при умові $|g(x, t)| \leq \chi(x)$, коли для (2.42) необхідно було так синтезувати матрицю C , щоб для змінної y , яка регулюється, виявилась справедливою оцінка $|y(t)| \leq |y(0)| \exp(-\alpha t)$. Тут $A \in \mathbf{R}_{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}_{n \times m}$ – задані постійні матриці; $h = \text{const} \in \mathbf{R}_{n \times 1}$, $g : \{g(x, t) / g(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{T} = [0; \infty) \subset \mathbf{R}_1; \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_n\}$ – відомі вектори; $\chi : \{\chi(t) / \chi(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbf{T}; \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1\}$ – задана додатна функція.

У своїх роботах [40-44, 56, 57] А.М. Мейлахс, базуючись на результатах К.Д. Якубович і застосовуючи їх для випадку $\alpha = 0$ в лінійних і нелінійних системах, знайшов загальний вигляд лінійних управлінь, які розв'язують задачу монотонної стабілізації у випадках повного і неповного зворотного зв'язку, і отримав алгоритм рекурентної побудови матриць $D^T = D > 0$ квадратичних форм вигляду

$$V = x^T D x > 0 \quad (2.43)$$

для систем (2.39) при умові

$$\dot{V} = x^T [D(A - BC) + (A - BC)^T D] x < 0. \quad (2.44)$$

При цьому, звичайно, для управління u розміру $m = n$ задача монотонної стабілізації (2.44) завжди має розв'язок [41] у класі C -управлінь, коли також матрицю C можна знаходити за формулою [42]

$$C = -(DB)^{-1}(DA + T_1 + T_2), \quad (2.45)$$

де $T_1^T = T_1 > 0$, – довільна позитивно визначена симетрична матриця, $T_2^T = -T_2 < 0$ – довільна кососиметрична матриця.

Якщо ж $\text{rang } B = m < n$, то для розв'язання задачі монотонної стабілізації (2.44) для системи (2.39) відносно квадратичної форми (2.43) необхідно і достатньо, щоб симетрична матриця

$$R^T = R = S^T(DA + A^T D)S < 0 \quad (2.46)$$

була негативно визначена для деякої матриці $S \in \mathbf{R}_{n \times (n-m)}$, стовпчики $s : \{s_j / j = \overline{1, n-m}\}$ якої є лінійно-незалежними розв'язками рівняння

$$B^T D s = 0. \quad (2.47)$$

Для матриці C управління $u = -Cx$ можна при цьому запропонувати або закон реалізації

$$C = \tau B^T D, \quad \tau > 0 \in R_1, \quad (2.48)$$

аналогічний розглянутому в [58], або формулу [42]

$$C = Z_1 S^T + Z_2 B^T D, \quad (2.49)$$

де $Z_1 \in \mathbf{R}_{m \times (n-m)}$ – довільна матриця, а $Z_2 \in \mathbf{R}_{m \times m}$ має вигляд

$$Z_2 = \frac{1}{2} \left\{ [Z_1 + B^T D(DA + A^T D)S] R^{-1} [Z_1 + B^T D(DA + A^T D)S]^T - B^T D(DA + A^T D)DB - T_1 \right\} + T_2$$

і виражається через довільні матриці Z_1, T_1 і T_2 , причому $T_1^T = T_1 > 0 \in \mathbf{R}_{m \times m}$,

$$T_2^T = -T_2 \in \mathbf{R}_{m \times m}.$$

В обох випадках матриця D повинна підкорятися умовам стабілізації (2.46), (2.47), які повинні виконуватися.

Для нелінійних систем в роботах [43, 44, 57] розв'язок задачі стабілізації зводиться до частинних випадків стабілізації систем у першому (лінійному) наближенні, причому, наприклад, в [40] задача монотонної стабілізації нелінійних систем розглядалась у постановці з [45]: *система $\dot{x} = f(x, u)$ називається стабілізованою в деякому околі початку координат, якщо для неї існує стабілізуюча пара – функція Ляпунова $V(x) > 0$ і управління $u = u(x)$, при яких $\dot{V}(x) < 0$ на траєкторіях замкнутої системи, а розв'язок задачі стабілізації зводиться до побудови регулятора $u = -Cx$ для лінійної системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де*

$$A = \sum_{i=1}^{m+1} p_i \left. \frac{\partial f(0, u_i)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1, \quad p_i > 0 \quad \text{і} \quad B = [b_1, \dots, b_m], \quad b_i = f(0, u_i) - f(0, u_m), \quad i = \overline{1, m}.$$

Оригінальний підхід до розв'язання задачі стабілізації нелінійних систем застосував у своїх роботах О.С. Яковлєв [46-52]. Його перші публікації з цього приводу з'явилися на початку 70-х років [47, 48, 50].

В його роботах [49, 52] зверталась увага на те, що при синтезі достатньо великої множини законів стабілізації для нелінійного багатовимірного об'єкта виду (2.13) відповідне матричне рівняння Ляпунова (2.32) представляється у вигляді матриці

$$Z = \dot{D} + D(A + BC) + (A + BC)^T D < 0, \quad (2.50)$$

причому компоненти c_{ij} множини допустимих матриць управління C в ній повинні задовольняти n нерівностей Сильвестра

$$(-1)^k Z_k(x, c, t) > \alpha(x) > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.51)$$

Ідея тут досить проста і в задачах аналізу нелінійних систем вигляду

$$\dot{x} = A(x)x \quad (2.52)$$

була описана В.І. Зубовим [59] (дещо кращий варіант методу, розглянутого в [59], наведений в [23]; можна виділити також результати робіт [60-63]). Умови стійкості при цьому набувають форми нерівностей, які задовольняють, наприклад, власні числа матриці (2.50).

В задачах синтезу подібна процедура довгий час вважалась неконструктивною хоча б тому, що з n нерівностей Сильвестра (2.51) доводиться знаходити $n \times m$ компонент матриці C , коли в матриці управління залишається $n \times (m - 1)$ вільних параметрів. Така слабка обумовленість управління в більшості випадків виявляється явно недостатньою для успішного розв'язання задачі стабілізації. І перше велике досягнення автора полягає в застосуванні перетворення Гауса до матриці Z , що еквівалентно заміні змінних

$$x = W_1^T y \quad (2.53)$$

у вихідній задачі з нижньою трикутною матрицею коефіцієнтів W_1 гаусівського перетворення, яке здійснює процедуру такого типу: з усіх рядків матриці Z (починаючи з другого), попередньо помножених на величину p_1 , віднімається перший рядок, що множиться послідовно на величини p_2, p_3, \dots, p_n , де

$$p_j = b_1^T d_j, \quad (2.54)$$

тут b_1 – перший і d_j – j -й стовпчики матриць B і D , $j = \overline{1, n}$, відповідно.

В цьому випадку перетворення матриці Z

$$G = W_1 Z W_1^T \quad (2.55)$$

дозволило застосувати рекурентну процедуру для визначення невідомих компонент матриці C , оскільки головні діагональні мінори матриць Z і G зв'язані співвідношенням [51]

$$G_k = p_1^{2(k-1)} Z_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.56)$$

В результаті нерівності Сильвестра (2.51) набувають вигляду

$$(-1)^k G_k = (-1)^k p_1^{2(k-1)} Z_k > p_1^{2(k-1)} \alpha(x) > 0, \quad (2.57)$$

якщо тільки функція $p_1(x, t)$ не перетворюється тотожно в нуль на цілих напівтраєкторіях системи

$$\dot{x} = [A(x, t) + B(x, t)C(x, t)]x$$

при $t \geq 0$. При цьому виявляється, що мінор G_1 лінійно залежить лише від c_{11} , мінор G_2 залежить лише від c_{11}, c_{12} і, взагалі, при будь-якому $k = \overline{1, n}$ мінор G_k буде залежати лише від $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1k}$, а починаючи з $k = 2$, будь-який k -й мінор G_k можна представити у вигляді квадратного тричлена відносно невідомої функції c_{1k} .

Друге велике досягнення автора полягає в тому, що йому вдалось дискримінанти вказаних квадратних тричленів (рівнянь) представити у вигляді добутку двох мінорів, причому, наприклад, у випадку визначення c_{1k} першим множником дискримінанта виявляється мінор $(-1)^{k-1} G_{k-1}$, додатність якого, враховуючи умови (2.57), забезпечуються на попередньому етапі визначення величин $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1k-1}$, а другим множником є деякий мінор $G_k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ меншого порядку, який отриманий з G_k виключенням першого рядка і першого стовпчика. Тому умови дійсності величин $c_{1k}, k = \overline{1, n}$ (у вигляді умов додатності дискримінанта квадратного рівняння відносно c_{1k}) зводяться до виконання нерівностей

$$(-1)^{k+1} G_k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \beta(x) > 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.58)$$

аналогічних (2.57) і (2.51).

Так шляхом рекурентного розв'язання нерівностей Сильвестра відносно потрібних компонент c_{ij} матриці управління C спільно з умовами їх дійсності реалізується нелінійна задача монотонної стабілізації і знаходяться $m(2n - m + 1)/2$ компонент $c_{ii}, c_{ij}, j > i, i = \overline{1, m}$ матриці C через $m(m - 1)/2$ її

довільних компонент $c_{sr}, s = \overline{2, m}, r = \overline{1, s-1}$, що лежать нижче її головної діагоналі c_{ii} та через довільні функції k_{ii}, k_{ij} , що задовольняють нерівності [49, 52]

$$k_{ii}(x, t) > \alpha(x) > 0, \quad |k_{ij}(x, t)| < 1.$$

Умови дійсності функцій c_{sr} записуються у вигляді нерівностей, аналогічних (2.58), які, проте, не залежать від управляючих впливів. Вони зумовлюють певні обмеження на компоненти матриці D квадратичної форми V і є достатніми умовами стабілізації вихідної системи $\dot{x} = [A(x, t) + B(x, t)C(x, t)]x$.

В останніх публікаціях [49, 51, 52] автор відходить від монотонної стабілізації і вже не задає априорі квадратичну функцію Ляпунова, а знаходить її з умов стабілізованості системи і умов додатної визначеності квадратичної форми. Звісно, для нелінійних нестационарних систем досить великого порядку і при великому $k = n - m$ ця задача може виявитись не такою вже й простою: вона зводиться до перевірки системи нелінійних нерівностей з нелінійними обмеженнями.

Взагалі ж, стосовно *монотонної стабілізації* слід відмітити, що априорний вибір функції Ляпунова у вигляді фіксованої квадратичної форми $V = x^T D(t)x > 0$ не лише звужує множину допустимих законів управління [52], але й може призвести до суперечливих умов стабілізованості (до їх невиконання), коли *достатність* цих умов виявляється досить далекою від *необхідності*. Це означає, що побудова функції Ляпунова за заданою її похідною в процесі синтезу регулятора ймовірно представляє деякі переваги порівняно з методами монотонної стабілізації, коли і структура функції Ляпунова, і значення її параметрів обумовлюються з самого початку розв'язання задачі [23].

Стабілізація нелінійних систем за їх лінійними наближеннями, коли матриця D коефіцієнтів квадратичної форми V знаходиться як розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + DA_0 + A_0^T D = -Q, \quad (2.59)$$

записаного для *лінійного стаціонарного наближення*

$$\dot{x} = A_0 x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.60)$$

вихідної розімкнутої системи (2.13) (цей напрям передбачає стійкість (асимптотичну стійкість) лінійного наближення (2.60) системи (2.13)), після чого знайдена матриця D використовується для замкнутої системи (2.19) вже як задана; цей підхід використовується, зокрема, в роботах [18, 20, 34, 35, 64].

Для вихідної розімкнутої системи (2.60), де $x \in \mathbf{R}_n$, $A \in \mathbf{R}_{n \times n}$, знаходиться додатно визначена квадратична форма (2.43) $V = x^T D x > 0$, як розв'язок рівняння Ляпунова

$$x^T (DA_0 + A_0^T D) x = -x^T Q x < 0. \quad (2.61)$$

Оскільки вихідна система (2.60) вважається асимптотично стійкою, то матриця $D > 0$ однозначно знаходиться з (2.61) при будь-якій [29] фіксованій матриці $Q > 0$.

Потім розглядається система (2.52) у вигляді, наприклад, [20]

$$\dot{x} = A(x)x + Bu, \quad (2.62)$$

замкнута управлінням $u \in U \subset \mathbf{R}_m$ при $B \in \mathbf{R}_{n \times m}$, і необхідно, щоб повна похідна квадратичної форми (2.43), знайдена на траєкторіях системи (2.62), була від'ємно визначеною.

Маємо

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T D B u < 0. \quad (2.63)$$

Умову (2.63) можна задовольнити, вибравши управління $u = f(x)$ наприклад, так, щоб

$$x^T D B f(x) \leq 0. \quad (2.64)$$

В цьому випадку вектор-функцією $f : \{f(x) / \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_m\}$ можна регулювати якість перехідного процесу в асимптотично стійкій системі $\dot{x} = Ax + Bf(x)$.

Умова (2.64) виявляється завжди справедливою, зокрема, при

$$f(x) = -PB^T D x, \quad (2.65)$$

коли управління визначається з точністю до довільної позитивно визначеної матриці $P > 0$. Її конкретизація можлива при наявності додаткових умов щодо управління, наприклад, обмеження вигляду $|u| \leq r$, або вимога про максимізацію швидкості зменшення V вздовж траєкторії x системи (2.64), або,

нарешті, при переході від задачі 1 (задачі стабілізації) до задачі 3 (оптимальної стабілізації), коли P буде розв'язком матричного рівняння Ріккати, а управління (2.65) буде мінімізувати заданий квадратичний критерій якості

$$I = \int_0^{\infty} (x^T W x + u^T R^{-1} u) dt, \quad W \geq 0, \quad R > 0.$$

Цікаво відмітити твердження з [34]: якщо система $\dot{x} = F(x)$ асимптотично стійка і для неї існує функція Ляпунова $V(x)$, то асимптотично стійкою буде і система $\dot{x} = F(x) + u(x)$, де управління u підкоряється закону $u = [S(x) - Q(x)]V'_x$, причому $S^T = -S$ і $Q^T = Q > 0$ – довільні матриці.

В лінійному випадку (2.62) системи (2.52), асимптотично стійкої згідно умовам (2.63), (2.64), управління набуває вигляду

$$u = [S - Q_1]B^T D x, \quad (2.66)$$

і для системи (2.62), замкнутої управлінням (2.66), умова (2.63) переписеться наступним чином: $\dot{V} = -x^T Q x - 2x^T D B Q_1 B^T D x$. Вона буде завжди виконуватись, оскільки для $Q_1^T = Q_1 > 0$

$$\dot{V} = -x^T Q x - 2x^T D B Q_1 B^T D x < -x^T Q x. \quad (2.67)$$

Аналогічний результат отриманий в 1966 році в [35]. Випадок $S = 0$, $Q = Q_1(t)$ був розглянутий Джонсоном [64] в 1964 році.

При цьому слід відмітити характерну особливість розглянутих тут підходів – апріорну асимптотичну стійкість розімкнутих систем в першому наближенні, коли функція Ляпунова, що застосовується для синтезу управлінь в замкнутій системі, знаходиться попередньо із рівняння Ляпунова (2.62) для розімкнутої системи (2.60).

Напевно, вперше запропонував метод синтезу законів стабілізації, вільний від будь-яких обмежень на попередню стійкість вихідної розімкнутої системи, В.Д. Фурасов.

В роботі [19] для вихідної системи типу $\dot{x} = A_0 x + B u$, але в нестационарному варіанті

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (2.68)$$

і квадратичної форми (2.43) необхідно виконання умови

$\dot{V} = -x^T Qx + 2x^T DBu < 0$ у вигляді

$$\dot{V} = x^T (DA + A^T D)x + 2x^T DBu = -x^T Qx < 0. \quad (2.69)$$

Якщо припустити рівномірну асимптотичну стійкість розімкнутої системи

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.70)$$

то на траєкторії

$$x^T DB = 0 \quad (2.71)$$

співвідношення (2.68) буде задовольнятися будь-яким управлінням. В [19] воно пропонується у вигляді

$$u = \ell(x, t) + k(x, t), \quad (2.72)$$

де ℓ - будь-який вектор, а $k = 0$ на множині (2.70).

Всюди, де

$$x^T DB \neq 0, \quad (2.73)$$

множину вектор-функцій k можна знайти із (2.69) у вигляді

$$k = p(x, t) - \lambda B^T Dx, \quad (2.74)$$

при умові

$$x^T DBp = 0. \quad (2.75)$$

Управління (2.72) в цьому випадку буде підкорюватись закону

$$u = \ell(x, t) - \lambda B^T Dx + p(x, t). \quad (2.76)$$

Що стосується функції Ляпунова, то матриця D її коефіцієнтів повинна бути розв'язком матричного рівняння Ріккати

$$DA + A^T D - 2\lambda DBB^T D + Q = 0 \quad (2.77)$$

замість рівняння Ляпунова, яке звичайно задовольняє матриця D квадратичної форми вигляду (2.43).

Закон стабілізації (2.76) розв'язує поставлену задачу в усій області Ω існування й однозначності розв'язків системи (2.68), причому на множині траєкторій (2.70), де k у вигляді (2.74) перетворюється в нуль, розв'язком задачі буде довільне управління $u = \ell(x, t)$, а в решті області (2.72) управління слід вибирати у вигляді (2.76) з урахуванням (2.74).

Управління (2.76) визначається з точністю до довільної функції ℓ , для конкретизації якої необхідні додаткові умови. Наприклад, можна вимагати, щоб умова (2.68) виконувалась при мінімальній величині u . Тоді як критерій якості застосовується вираз $I = \inf u^T u / u \in U, t \geq 0$, і отримане в цьому випадку управління

$$u_* = -\lambda B^T D x \quad (2.78)$$

буде оптимальним за примусом. Неважко помітити, що його можна розглядати як частковий випадок з (2.76) при умові $\ell = p = 0$.

Таким чином в [19, 20] задача синтезу регулятора ставиться як оптимальна з інтегральним критерієм якості і управлінням з апіорною структурою вигляду (2.78) або в більш загальному випадку (2.76).

Подібний до [19] підхід з розв'язання задачі стабілізації розглядається в [65]. Система $\dot{x} = g(x, t) + B(x, t)u$ називається стабілізованою, якщо для неї на траєкторіях (2.71) виконується в розімкнутому стані $\dot{x} = g(x, t)$ умова (2.5).

Оптимальна стабілізація динамічних систем, коли апіорі вводить зв'язок матриці управління C з матрицею D коефіцієнтів квадратичної форми, найчастіше мультиплікативний $C = KD$.

Цей підхід як правило приводить до заміни рівняння Ляпунова (2.32) матричним рівнянням Ріккати $\dot{D} + DA + A^T D - DBRB^T D = -P$, і дозволяє розв'язувати задачі *оптимальної стабілізації*.

Отже, проведений аналіз розв'язків задач стабілізації дозволяє розділити їх на дві групи.

Автори, які розглядають задачі з *першої* групи (а їх більшість), припускають асимптотичну стійкість розімкнутих систем (у загальному випадку, рівномірну по x_0, t_0 [17]). Тому для них, як правило, не виникає проблеми існування функції Ляпунова, бо, наприклад, для лінійних стаціонарних або періодичних систем її завжди можна отримати як однозначний розв'язок рівняння Ляпунова (при фіксованій правій частині) для відповідних розімкнутих систем.

До *другої* групи можна віднести задачі стабілізації, розв'язані для нестійких в розімкнутому стані об'єктів. Для них управління пропонується

реалізовувати у вигляді двох різних законів, призначених для областей $V'_x B(x,t) = 0$ і $V'_x B(x,t) \neq 0$ відповідно. Ці управління в загальному вигляді можна адитивно звести до одного. Функція Ляпунова в цих задачах не задається апіорі, а знаходиться як розв'язок рівняння Ляпунова для замкнутої системи паралельно з розв'язком задачі синтезу матриці управління (відмітимо, що в задачах першої групи функція Ляпунова знаходиться з аналогічного рівняння, але для розімкнутої системи, яка повинна бути стійкою). Ця відмінність у методах побудови функції Ляпунова для задач першої та другої групи виявляється досить суттєвою тому, що шукане управління, як правило, виражається через функцію Ляпунова (точніше через її частинну похідну за вектором стану системи). В результаті рівняння Ляпунова для замкнутої системи перетворюється в задачах другої групи в рівняння типу Ріккати відносно матриці коефіцієнтів квадратичної форми – функції Ляпунова.

Характерно, що синтез управління в задачах стабілізації в обох групах приводить або до неявних розв'язків, що виражаються через частинні похідні функції Ляпунова, або до нелінійних законів управління релейного типу.

Жорстка стабілізація нелінійних систем, коли фіксується структура матриці D мультиплікативною параметризацією будь-якою неособливою блочно-трикутною матрицею (наприклад, *нижньою*) у вигляді

$$D = D_* D_*^T, \quad (2.79)$$

або відповідно *верхньою*

$$D = D_*^T D_*, \quad (2.80)$$

при умові

$$\det D_* \neq 0, \quad (2.81)$$

коли гарантується її симетричність і позитивна визначеність [67], а також зменшується кількість її незалежних блоків, які вимагають безпосередньої ідентифікації з рівняння (2.32). Зазначений напрям одержав назву *жорсткої стабілізації* (ЖС) [68]. Детальніше цей метод розглянуто в наступному розділі роботи.

Основні положення та результати досліджень даного розділу викладені автором у роботах [2, 3].

2.4. Висновки до розділу 2

1. Як реалізація другого підготовчого етапу розв'язання задачі побудови САПР стабілізуючих регуляторів нелінійних об'єктів, проаналізовані можливі шляхи стабілізації нелінійних систем на основі прямого методу Ляпунова.
2. Проблема стабілізації нелінійних систем, що вирішується з використанням прямого методу Ляпунова, приводить для систем, які подані у псевдолінійній формі, до матричного рівняння Ляпунова, з якого треба визначити дві матриці – матрицю управління C і матрицю D коефіцієнтів квадратичної форми – функції Ляпунова.

Ця, здавалося б погано обумовлена задача, розв'язується чотирма можливими шляхами:

- a. матриця D задається апріорі, тоді з рівняння Ляпунова визначається лише матриця C (монотонна стабілізація);
- b. матриця D знаходиться як розв'язок рівняння Ляпунова, записаного для лінійного наближення нелінійної системи (це можливо лише при асимптотичній стійкості лінійного наближення), після чого вона вже як відома використовується в рівнянні Ляпунова для нелінійної системи, з якого і визначається матриця C (стабілізація за лінійним наближенням);
- c. шукана матриця C лінійно зв'язується з матрицею D і після подання її у вигляді $C=KD$ перетворює рівняння Ляпунова на матричне рівняння Ріккати, що дозволяє розв'язувати також і задачу оптимальної стабілізації;
- d. жорстко обмежується структура матриці $D = D_* D_*^T$ шляхом її параметризації довільною неособливою квазітрикутною нижньою (тоді і матриця D називається *нижньою*) чи верхньою (відповідно матриця D називається *верхньою*) матрицею D_* . Цей підхід отримав назву *методу жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації*.

3. Апріорний вибір функції Ляпунова у вигляді фіксованої квадратичної форми $V = x^T D(t)x > 0$ в методах монотонної стабілізації не лише звужує множину допустимих законів управління, але й може призвести до суперечливих умов стабілізованості (до їх невиконання), коли *достатність* цих умов виявляється досить далекою від *необхідності*. Це означає, що побудова функції Ляпунова за заданою її похідною в процесі синтезу регулятора представляє певні переваги порівняно з методами монотонної стабілізації, коли і структура функції Ляпунова, і значення її параметрів обумовлюються із самого початку розв'язання задачі.
4. Аналіз шляхів реалізацій задач стабілізації дозволяє розділити їх на *дві* групи:
- Автори, які розглядають задачі з *першої* групи (а їх більшість), припускають асимптотичну стійкість розімкнутих систем (в загальному випадку, рівномірну по x_0, t_0). Тому для них, як правило, не виникає проблеми існування функції Ляпунова, адже, наприклад, для лінійних стаціонарних або періодичних систем її завжди можна отримати як однозначний розв'язок рівняння Ляпунова (при фіксованій правій частині) для відповідних розімкнутих систем.
 - До *другої* групи можна віднести задачі стабілізації, розв'язані для нестійких в розімкнутому стані об'єктів. Для них управління пропонується реалізовувати у вигляді двох різних законів, призначених для областей $V'_x B(x, t) = 0$ і $V'_x B(x, t) \neq 0$ відповідно. Ці управління в загальному вигляді можна адитивно звести до одного. Функція Ляпунова в цих задачах не задається апріорі, а знаходиться як розв'язок рівняння Ляпунова для замкнутої системи паралельно з розв'язком задачі синтезу матриці управління. У більшості випадків рівняння Ляпунова при цьому перетворюється на рівняння Ріккати.
 - Характерно, що синтез управління в задачах стабілізації в обох групах призводить або до неявних розв'язків, що виражаються через частинні похідні функції Ляпунова, або до нелінійних законів управління релейного типу.

5. Методи ПЖС НСС застосовуються для стабілізації як стійких, так і нестійких нелінійних об'єктів, не потребують забезпечення обов'язкових умов додатної визначеності матриці коефіцієнтів квадратичної форми (вони виконуються автоматично завдяки мультиплікативній параметризації матриці), мають досить просту процедуру синтезу регулятора стабілізації без інтегрування рівнянь Ляпунова чи Ріккати та зручне забезпечення умов стабілізації.

Результати даного розділу використані в публікаціях у наукових виданнях.

Список публікацій здобувача:

1. Сусол М.Н. Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к нелинейным объектам / С.М. Онищенко, Н.П. Коваленко, М.Н. Сусол // Проблемы информатизации та управління. – К.: НАУ. – 2005. – Вип. 2(13). – С. 73 – 77.
2. Сусол М.Н. К проблеме стабилизации нелинейных систем / М.Н. Сусол // Материалы V Международной НТК "Гиротехнологии, навигация и управление движением". К.: – НТУУ "КПИ". – 2005. – С. 327 – 334.
3. Сусол М.Н. Анализ алгоритмов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / О.Л. Клименко, Н.П. Коваленко, С.М. Онищенко, М.М. Сусол // Проблемы управления и информатики. – 2006. – №4 – С. 30 – 39.
4. Сусол М.Н. Анализ методов прямого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / О.Л. Клименко, Н.П. Коваленко, С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // Материалы VIII Крымской международной математической школы. "Метод функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь: НТУ. – 2006. – С. 80.
5. Сусол М.Н. Анализ условий стабилизируемости нелинейных систем шестым алгоритмом синтеза / М.Н. Сусол // Матеріали Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених „Політ-2006”. – К:НАУ. – 2006. – С. 200.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПРЯМОГО ЖОРСТКОГО СИНТЕЗУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ СТАБІЛІЗАЦІЇ, ЇХ ОПТИМІЗАЦІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ В САПР

3.1. Загальна характеристика методів прямого жорсткого синтезу систем стабілізації

Визначення: *Метод прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації (ПЖС НСС) полягає в побудові такої матриці управління C в (2.18), при якій матриця коефіцієнтів $A-BC$ замкнутої системи (2.19) буде задовольняти рівняння Ляпунова (2.32) при фіксованих структурах матриць D, Q коефіцієнтів квадратичних форм V, W в (2.21), (2.22) і умові*

$$D = \text{const}, \quad (3.1)$$

коли воно набуває вигляду

$$D(A-BC) + (A-BC)^T D = -Q. \quad (3.2)$$

Відзначимо неодмінну обмеженість області застосування методу ПЖС НСС при розв'язанні задач стабілізації *нелінійних* систем, обумовлену такими факторами:

- використанням як функції Ляпунова квадратичної форми замість нелінійних функцій Ляпунова, що було б більш доцільним;
- стаціонарністю матриці D коефіцієнтів квадратичної форми V ;
- апріорною параметризацією матриць D і Q коефіцієнтів квадратичних форм V і W квазітрикутними неособливими матрицями.

Ці фактори зменшують область допустимих систем, які синтезуються вказаними методами (подібно до того, як вони зменшують область стійкості нелінійних систем в задачах аналізу). Однак для всіх тих нелінійних систем, для яких в межах побудованої підмножини допустимих управлінь вдається забезпечити і достатню величину області рівномірної асимптотичної стійкості, і необхідну якість перехідного процесу, застосування квадратичної форми V із стаціонарною матрицею коефіцієнтів як функції Ляпунова для нелінійних нестационарних систем виправдовується порівняною простотою і наочністю результатів, що отримуються в задачах синтезу [14, 52, 58].

Реалізація жорсткого синтезу (ЖС) систем стабілізації можлива декількома методами й істотно залежить від властивостей матриці B .

При умові (2.33)

$$B \in \mathbf{R}_{n \times n}, \quad r \quad a = m, \quad \exists B^{-1} \mathcal{E},$$

коли матриця B неособлива і має обернену, матрицю керування C можна знайти з рівняння Ляпунова (3.2) методом кососиметризації [66] за допомогою процедури (2.34)–(2.35) у вигляді (2.36)

$$C = B^{-1} \left[A + \frac{1}{2} D^{-1} (\dot{D} + Q + S) \right].$$

Вона цілком вирішує задачу стабілізації будь-якої нелінійної системи, навіть апіорі нестійкої, без будь-яких умов стабілізованості, причому з довільною матрицею D (не втрачаючи узагальненості, у виразі (2.36) можна покласти $D = I_n$ – одинична матриця n -го порядку).

Проблема значно ускладнюється, коли матриця B має вигляд (2.37)

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}_{n \times m}, \quad m < n. \quad (3.3)$$

При цьому для розв'язання задачі стабілізації повинна обов'язково виконуватися одна з двох умов. Або

$$B_1 \in \mathbf{R}_{m \times m}, \quad r \quad a_1 = m < n, \quad k \exists B_1^{-1} \mathcal{E}, \quad (3.4)$$

або

$$B_2 \in \mathbf{R}_{m \times m}, \quad r \quad a_2 = m, \quad \exists B_2^{-1} \mathcal{E} \quad (3.5)$$

що рівнозначно твердженню: матриця B у (3.3) повинна мати максимально можливий ранг, рівний m – розмірності управління.

Вигляд (3.3) матриці B зумовлює блочне представлення матриць A, C, Q^* і D^* . Будемо мати

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.6a)$$

$$C = [C_1 \quad C_2], \quad (3.6б)$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ D_{12}^T Q_1 & D_{22} Q_2 \end{bmatrix}, \quad \det Q_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.6в)$$

$$D_* = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_{12}^T D_1 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \det D_i \neq 0, \quad i=1,2. \quad (3.6z)$$

Для нижньої блочно-трикутної матриці (3.6z) згідно (2.79) для D неважко одержати вираз

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T D_1 & D_{11} & D_{12} \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

при

$$D_{ii} = D_i D_i^T, \quad i=1,2. \quad (3.8)$$

Тоді за аналогією для верхньої блочно-трикутної матриці

$$D_*^T = \begin{bmatrix} D_1 & D_{21}^T D_2 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \det D_i \neq 0, \quad i=1,2, \quad (3.9)$$

з урахуванням (2.80), (3.8) будемо мати

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_{12}^T D_2 & D_{11} \\ D_{12} D_2 & D_{11} & D_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Зафіксуємо структуру (2.79) також і для матриць Q мультиплікативною параметризацією *нижніми* блочно-трикутними неособливими матрицями. Тоді, враховуючи умову (3.6v), для матриці Q , прийнявши

$$Q = Q_* Q_*^T \quad (3.11)$$

будемо мати

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ D_{12}^T Q_{11} & D_{12}^T Q_{11} D_{12} + D_{22} Q_{22} D_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

де позначено

$$Q_{11} = Q_i Q_i^T, \quad i=1,2. \quad (3.13)$$

Для верхньої блочно-трикутної матриці Q_* матриця Q буде мати вигляд

$$Q = \begin{bmatrix} D_{11} Q_{11} D_{11} + D_{21}^T D_{22} Q_{22} D_{22} D_{21} & D_{21}^T D_{22} Q_{22} D_{22} \\ D_{22} Q_{22} D_{22} D_{21} & D_{22} Q_{22} D_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Фіксована структура (3.7), (3.12) матриць D і Q забезпечує при умовах (3.8), (3.13) їх позитивну визначеність з будь-якою (як за величиною, так і за знаком) матрицею D_{12} і зводить невизначеність задачі ідентифікації матриці D до допустимих меж.

Якщо тепер порівняти попарно матриці D і Q , то легко переконатись, що для *нижньої* матриці D у вигляді (3.7) матриця Q має аналогічну (нижню) структуру (3.12) і, що таке ж твердження справедливе і для *верхніх* матриць D і Q відповідно у вигляді (3.10) і (3.14).

Рівняння Ляпунова (3.2) для *нижньої* матриці D з (3.7) матиме вигляд таких трьох рівнянь стійкості замкнутої системи щодо блоків матриць (3.6), (3.7):

$$D_{11}({}^1A_{11} - {}^1B_1C_1) + ({}^1A_{11} - {}^1B_1C_1)^T D_{11} = -Q_{11}, \quad (3.15a)$$

$$D_{22}({}^1A_{22} + B_2C_1D_{12} - B_2C_2) + ({}^1A_{22} + B_2C_1D_{12} - B_2C_2)^T D_{22} = -D_{22}Q_{22}D_{22}, \quad (3.15б)$$

$$D_{11}[({}^1A_{12} - {}^1B_1C_2) - ({}^1A_{11} - {}^1B_1C_1)D_{12}] + (A_{21} - B_2C_1)^T D_{22} = 0 \quad (3.15в)$$

а для *верхньої* матриці D з (3.10) відповідно

$$D_{11} [\tilde{A}_{11} - B_1 (C_1 - C_2 D_{21})] + [\tilde{A}_{11} - B_1 (C_1 - C_2 D_{21})]^T D_{11} = -D_{11} Q_{11} D_{11}, \quad (3.16a)$$

$$D_2 (\tilde{A}_{22} - \tilde{B}_2 C_2) + (\tilde{A}_{22} - \tilde{B}_2 C_2)^T D_2 = -D_2 Q_2 D_2, \quad (3.16б)$$

$$D_2 [\tilde{A}_{22} + D_{21} \tilde{A}_{11} - \tilde{B}_2 (C_1 - C_2 D_{21})] + (A_{11} - B_1 C_2)^T D_{11} = 0, \quad (3.16в)$$

У рівняннях (3.15), (3.16) для зручності позначено

$${}^1A_{11} = A_{11} + D_{12}A_{21}, \quad {}^1A_{12} = A_{12} + D_{12}A_{22}, \quad {}^1A_{22} = A_{22} - A_{21}D_{12}, \quad {}^1B_1 = B_1 + D_{12}B_2; \quad (3.17a)$$

$$\tilde{A}_{11} = A_{11} - A_{12}D_{21}, \quad \tilde{A}_{21} = A_{21} - A_{22}D_{21}, \quad \tilde{A}_{22} = A_{22} + D_{21}A_{12}, \quad \tilde{B}_2 = B_2 + D_{21}B_1. \quad (3.17б)$$

Оскільки рівняння (3.15в) і (3.16в) в обох системах залежать від двох блоків C_1 і C_2 матриці C , що дозволяє формально виражати кожен з них через інший, то це перетворює системи (3.15) і (3.16) у рівнозначні три рівняння в кожній щодо шуканих матриць C_1, C_2 . Причому з двох будь-яких рівнянь у кожній системі можна визначити C_1 і C_2 , а третє співвідношення, що залишилося, після виключення в ньому вже знайденої матриці управління можна розглядати як *умову стабілізованості*. В результаті для кожної із систем (3.15) і (3.16) з'являється можливість формальної реалізація *шести* різних алгоритмів розв'язання задачі. Їх зручно звести в таблицю 3.1.

З неї видно, які саме співвідношення (3.15) чи (3.16) використовуються в кожному із шести алгоритмів для визначення блоків C_1 і C_2 матриці управління C , а які пропонуються як умови стабілізованості (вони позначені *зірочкою*).

Дослідимо ці алгоритми.

Таблиця 3.1

	Алгоритми					
Рівняння	1	2	3	4	5	6
(a)	C_1	C_1	*	C_2	C_2	*
(б)	C_2	*	C_1	C_1	*	C_2
(в)	*	C_2	C_2	*	C_1	C_1

В них для визначення двох необхідних матриць C_1, C_2 маємо три співвідношення. Їх аналіз дозволяє стверджувати, що матрицю C_2 зручніше знаходити з рівняння (3.15б).

В результаті із шести алгоритмів таблиці 3.1 виділяється два – *перший і шостий*.

3.2. Аналіз 1-го алгоритму жорсткого синтезу систем стабілізації для верхньої матриці D

Для введених структур (3.7), (3.12) матриць D і Q розглянемо спочатку перший алгоритм таблиці 3.1.

У роботі [69] досліджена реалізація 1-го алгоритму табл.3.1 для стабілізації нелінійних систем з використанням нижньої матриці D у вигляді (3.7) і рівнянь (3.15).

Розглянемо особливості реалізації цього алгоритму для *верхньої* матриці D .

Оскільки за умови (3.5) для матриці \tilde{B}_2 з (3.17б) буде завжди існувати обернена (довільний вид матриці D_{21} як за структурою, так і за величиною дозволяє забезпечити цю її властивість при будь-якій відомій матриці B_1), то застосовуючи метод кососиметризації до рівняння (3.16б), можна отримати таку матрицю C_2 :

$$C_2 = \tilde{B}_2^{-1} [\tilde{A}_2 + \frac{1}{2}(Q_2 + S_2)D_2]. \quad (3.18)$$

Виключивши її далі в рівнянні (3.16а), перепишемо його, ввівши позначення

$${}^1\tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_* [\tilde{A}_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]D_{21}, \quad \tilde{B}_* = B_1 \tilde{B}_2^{-1}, \quad (3.19)$$

у вигляді

$$D_1 ({}^1\tilde{A}_{11} - B_1 C_1) + ({}^1\tilde{A}_1 - B_1 C_1)^T D_1 = -D_1 Q_1 {}^1D_1 \quad (3.20)$$

після чого отримаємо для визначення матриці C_1 з (3.20) рекурентну процедуру, детально описану в [72]. На жаль, її реалізація буде більш трудомісткою, а структура матриці C_1 більш складною через громіздке перше позначення (3.19), що містить Q_{22} .

Умова стабілізованості (3.16в), враховуючи (3.18), матиме вигляд

$$D_{11} \left\{ \tilde{A}_{11} - B_1 (C_1 - \tilde{B}_2^{-1} [\tilde{A}_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]D_{21}) \right\} + \\ + \left\{ \tilde{A}_{11} - B_1 (C_1 - \tilde{B}_2^{-1} [\tilde{A}_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]D_{21}) \right\}^T D_{11} = -D_{11} Q_{11} D_{11}. \quad (3.21)$$

3.3. Аналіз 2-го алгоритму для нижньої матриці D

Звернемось до системи (3.15) і застосуємо до рівняння (3.15а) метод кососиметризації. У результаті будемо мати

$$C_1 = {}^1B_1^{-1} [{}^1A_{11} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11}], \quad (3.22)$$

де матриця 1B_1 згідно з відповідним позначенням з (3.17а) і виконанням умови (3.4) буде мати обернену при будь-якій заданій матриці B_2 (це забезпечується довільним вибором матриці D_{12}).

Виключаючи C_1 у (3.15в) з урахуванням (3.22), неважко отримати спочатку вираз $C_2 - C_1 D_{12}$ у вигляді

$$C_2 - C_1 D_{12} = {}^1B_1^{-1} [{}^1\hat{A}_1 - \frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11}) {}^1B_*^T D_{22}], \quad (3.23)$$

де для зручності позначено

$${}^1\hat{A}_{12} = {}^1A_{12} - {}^1A_{11} D_{12} + D_{11}^{-1} (A_{21}^T - {}^1A_{11}^T {}^1B_*^T) D_{22}, \quad {}^1B_* = B_2 {}^1B_1^{-1}, \quad (3.24)$$

а потім і формулу для матриці C_2

$$C_2 = {}^1B_1^{-1} [{}^1\hat{A}_1 + {}^1A_{12} D_{12} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11} D_{12} - \frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11}) {}^1B_*^T D_{22}] \quad (3.25)$$

Якщо далі в рівнянні (3.15б) виключити вираз $C_2 - C_1 D_{12}$ за допомогою співвідношення (3.23), то умова стабілізованості набуде вигляду

$$D_{22} ({}^1A_{22} - {}^1B_* {}^1\hat{A}_1) + ({}^1A_{22} - {}^1B_* {}^1\hat{A}_1)^T D_{22} = -D_{22} (Q_{22} - {}^1B_* Q_{11} {}^1B_*^T) D_{22}. \quad (3.26)$$

3.4. Аналіз 2-го алгоритму для верхньої матриці D

Розглянемо систему (3.16) і застосуємо до рівняння (3.16а) метод кососиметризації. В результаті запишемо для $C_1 - C_2 D_{21}$, враховуючи (3.4), співвідношення

$$C_1 - C_2 D_{21} = {}^1B_1^{-1} [\tilde{A}_1 + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11}] \quad (3.27)$$

виключаючи яке в рівнянні (3.16б), отримаємо в явному вигляді значення матриці C_2 . Так, ввівши позначення

$${}^1\tilde{B}_* = \tilde{B}_2 B_1^{-1} = B_{21} + D_{21}, \quad B_{21} = B_2 B_1^{-1}, \quad {}^1\tilde{A}_{12} = A_{12} + D_{11}^{-1}(\tilde{A}_{21} - B_{21}\tilde{A}_{11})^T D_{22}, \quad (3.28)$$

будемо мати

$$C_2 = B_1^{-1} [{}^1\tilde{A}_{11} \quad -\frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11}) \quad {}^1\tilde{B}_*^T D_{22}] \quad (3.29)$$

після чого, враховуючи (3.28), з (3.29) визначимо

$$C_1 = B_1^{-1} [\tilde{A}_{11} + {}^1\tilde{A}_{12} D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11}) D_{11} - \frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11}) {}^1\tilde{B}_*^T D_{22} D_{21}] \quad (3.30)$$

і, виключаючи C_2 з рівняння (3.16б), отримаємо умову стабілізованості

$$D_{22}(\tilde{A}_{22} - {}^1\tilde{B}_* {}^1\tilde{A}_{12}) + (\tilde{A}_{22} - {}^1\tilde{B}_* {}^1\tilde{A}_{12})^T D_{22} = -D_{22}(Q_{22} + {}^1\tilde{B}_* Q_{11} {}^1\tilde{B}_*^T) D_{22}. \quad (3.31)$$

3.5. Аналіз 3-го, 4-го і 5-го алгоритмів

Реалізація **3-го алгоритму** з рівнянь (3.15) для *нижньої* матриці D неможлива. Дійсно, матрицю C_1 можна формально визначити з рівняння (3.15б) при умові (3.5), виразивши її через матрицю C_2 , лише в досить частинному випадку квадратної матриці D_{12} , що еквівалентно виконанню співвідношення

$$m = n / 2. \quad (3.32)$$

Однак, після виключення матриці C_1 з рівняння (3.15в) воно стає залежним як від C_2 , так і від C_2^T . Тому з нього важко отримати для матриці C_2 вираз в явному вигляді. У випадку *верхньої* матриці D рівняння (3.16б) від матриці C_1 не залежить, а рівняння (3.16в) залежить як від C_2 , так і від C_2^T .

Реалізація **4-го алгоритму** з рівнянь (3.15) для *нижньої* матриці D можлива лише при визначенні матриці C_1 з (3.15б) (за умови (3.5) у випадку (3.32), коли матриця D_{12} квадратна) у вигляді

$$C_1 = \{ C_2 - B_2^{-1} [{}^1A_2 + \frac{1}{2}(Q_2 + S_2) D_{22}] D_{12}^{-1} \} \quad (3.33)$$

з наступною заміною матриці C_1 в (3.15а) на C_2 і подальшим визначенням C_2 з (3.15а) методом кососиметризації. В результаті будемо мати

$$C_2 = {}^1B_1^{-1} [{}^1A_{11} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11}) D_{11}] D_{12} + B_2^{-1} [{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22}) D_{22}]. \quad (3.34)$$

Остаточно для C_1 , враховуючи (3.32), (3.33), отримаємо вираз

$$C_1 = {}^1B_1^{-1} [{}^1A_1 + \frac{1}{2}(Q_1 + S_1) D_1] . \quad (3.35)$$

Слід зазначити, що забезпечення існування в рівностях (3.34), (3.35) оберненої матриці ${}^1B_1^{-1}$ завдяки її структурі згідно (3.17) не викликає проблем.

Виключаючи матриці C_1 і C_2 з рівняння (3.15в), отримаємо, використовуючи формули (3.34), (3.35) і позначення (3.17а), (3.24), єдину умову стабілізованості у вигляді

$$\begin{aligned} D_1 ({}^1A_{11} - \frac{1}{2}A_1 D_{11} - {}^1B_*^{-1} {}^1A_2) + (A_2 - {}^1B_* {}^1A_1)^T D_2 = \\ = \frac{1}{2} D_1 [Q_1 + S_1] {}^1B_*^T + {}^1B_*^{-1} (Q_2 + S_2) D_2 . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Реалізація цього ж алгоритму з рівнянь (3.16) для *верхньої* матриці D має аналогічні проблеми. Матрицю C_2 можна знайти з (3.16а) лише за умови (3.32), виразивши її через матрицю C_1 , яка потім має бути визначена з рівняння (3.16б) після заміни в ньому матриці C_2 на C_1 .

Остаточний результат можна представити так:

$$\begin{aligned} C_1 = \tilde{B}_2^{-1} [\tilde{A}_2 + \frac{1}{2}(Q_2 + S_2) D_{22}] D_{22} + B_{11}^{-1} [\tilde{A}_1 + \frac{1}{2}(Q_1 + S_{11}) D_{11}], \\ C_2 = \tilde{B}_2^{-1} [\tilde{A}_2 + \frac{1}{2}(Q_2 + S_2) D_{22}] \quad 2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

з умовою стабілізованості

$$\begin{aligned} D_2 (\tilde{A}_2 + D_{22} \tilde{A}_{11} - \tilde{B}_*^{-1} \tilde{A}_1) + (A_1 - \tilde{B}_* \tilde{A}_2)^T D_1 = \\ = \frac{1}{2} D_2 [\tilde{B}_*^{-1} (Q_1 + S_1) + (Q_2 - S_2) \tilde{B}_*^T] D_1 \quad 1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

у позначеннях (3.17б), (3.19).

Що стосується **5-го алгоритму**, то його реалізація для *нижньої* матриці D з рівнянь (3.15) виявляється, як і у випадку 3-го алгоритму, неможливою: рівняння (3.15а) від C_2 не залежить, а визначення C_1 з (3.15в) практично неможливе, оскільки C_1 входить у (3.15в) як у вигляді C_1 , так і C_1^T .

Для *верхньої* матриці D з рівняння (3.16а) матрицю C_2 можна знайти у випадку (3.4) лише за умови (3.32). Але при цьому матриця C_2 визначається через C_1 , так що після її виключення з (3.16в) це рівняння стає залежним як від матриці C_1 , так і від C_1^T , що не дозволяє отримати його матричний розв'язок відносно C_1 у явному (аналітичному) вигляді.

3.6. Аналіз 6-го алгоритму для верхньої матриці D [2, 4, 5]

У роботі [70] розглянуто 6-й алгоритм з використанням *верхньої* матриці D для синтезу лінійних систем стабілізації, канонічних за управлінням.

Покажемо, що його можна успішно застосувати для синтезу нелінійних систем стабілізації [2].

Розглянемо систему рівнянь (3.16) і, застосовуючи до рівняння (3.16б) метод косиметризації, знайдемо матрицю C_2 у явному вигляді. Вона буде визначатися виразом (3.18). Підставимо його в рівняння (3.16в) і після нескладних перетворень знайдемо з нього матрицю C_1 у вигляді

$$C_1 = \tilde{B}_2^{-1} [\hat{A}_2 + \tilde{A}_{21} D_2 + \frac{1}{2}(Q_2 + S_{22}) D_2 - \frac{1}{2}(Q_2 - S_{22}) \tilde{B}_*^T D_1], \quad (3.39)$$

де

$$\hat{A}_{21} = \tilde{A}_{21} + D_{21} \tilde{A}_{11} + D_{22}^{-1} (A_{12}^T - \tilde{A}_{22}^T \tilde{B}_*^T) D_{11}. \quad (3.40)$$

Виключимо матриці C_1 і C_2 з рівняння (3.16а), використовуючи їх вирази (3.39), (3.18). У результаті отримаємо, враховуючи позначення (3.40), умову стабілізованості

$$D_1 (\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_*^T \hat{A}_2) + (\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_*^T \hat{A}_2)^T D_{11} = -D_1 (Q_1 + \tilde{B}_*^T Q_2 \tilde{B}_*^T) D_1. \quad (3.41)$$

3.7. Аналіз 6-го алгоритму для нижньої матриці D

Розглянемо систему (3.15) і застосуємо до її рівняння (3.15б) метод косиметризації. Тоді з урахуванням умови (3.5) будемо мати вираз

$$C_2 - C_1 D_1 = {}_2 B_2^{-1} [{}^1 A_2 + \frac{1}{2}(Q_2 + S_2) D_2]. \quad (3.42)$$

Підставимо його в рівняння (3.15в) і визначимо C_1 в явному вигляді.

Отримаємо

$$C_1 = B_2^{-1} [{}^1 \hat{A}_2 - \frac{1}{2}(Q_2 - S_2) \hat{B}_*^T D_1] \quad (3.43)$$

У рівності (3.43) позначено

$${}^1 \hat{A}_{21} = A_{21} + D_{22}^{-1} (A_{12}^T - D_{12}^T A_{11}^T - {}^1 A_{22}^T \hat{B}_*^T) D_{11}, \quad \hat{B}_* = {}^1 B_1 B_2^{-1}. \quad (3.44)$$

Якщо виключити C_1 з рівняння (3.15а), використовуючи (3.43), (3.44), то умова стабілізованості набуде вигляду

$$D_1 ({}^1A_1 - {}_1\hat{B}_* {}^1\hat{A}_2) + ({}^1A_1 - \hat{B}_* {}^1\hat{A}_2)^T D_1 = -D_1 (Q_1 + {}_1\hat{B}_* Q_2 \hat{B}_*^T) D_1, \quad (3.45)$$

а матриця C_2 з (3.42) опишеться виразом

$$C_2 = B_2^{-1} [{}^1A_{22} + {}^1\hat{A}_{21} D_{12} + \frac{1}{2} (Q_{22} + S_{22}) D_{22} - \frac{1}{2} (Q_{22} - S_{22}) \hat{B}_*^T D_{11} D_{12}]. \quad (3.46)$$

Неважко помітити, що на відміну від *першого* алгоритму, який реалізується рекурентною процедурою на l етапах, якщо n некротне m , коли

$$n = lm + k_l, \quad l = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor, \quad 0 < k_l = n - lm \neq 0, \quad (3.47)$$

або ж відповідно на $l-1$ етапі, якщо n кратне m – тоді

$$n = lm, \quad l = \frac{n}{m}, \quad k_l = 0, \quad (3.48)$$

і супроводжується такою ж кількістю умов стабілізації, *шостий* алгоритм як для нижньої, так і для верхньої матриць D синтезує обидва блоки матриці керування C лише на одному етапі з єдиною умовою стабілізації.

Отже, із шести алгоритмів синтезу систем стабілізації, зведених у табл.3.1, найбільш конструктивними можна вважати 1-й, 2-й і 6-й. При цьому слід зазначити, що особливе місце займає 1-й алгоритм. Він досить повно досліджений у роботах [69-72] при використанні *нижньої* матриці D коефіцієнтів квадратичної форми з параметризацією *нижньою* блочно-трикутною матрицею. У роботі [2] показано, що 1-й алгоритм можна використовувати і з *верхньою* матрицею D , причому в обох випадках синтез матриці управління C здійснюється на l чи на $l-1$ етапах рекурентною процедурою, а умови стабілізованості зводяться до умов Сильвестра позитивної визначеності допоміжних матриць m -го порядку [71].

Що стосується 6-го алгоритму, то спочатку його використання обмежувалося винятково областю лінійних нестационарних систем, канонічних за управлінням [70]. Показано [2], що його можна використовувати для розв'язання задач синтезу *нелінійних* систем як з *нижньою*, так і з *верхньою* матрицею D .

Аналогічний результат отриманий і для 2-го алгоритму [72]. При цьому матриця управління C цілком синтезується як 6-м, так і 2-м алгоритмами на

єдиному (першому) етапі, і в кожному випадку синтез супроводжується лише однією умовою стабілізованості.

Характерно, що застосування в обох цих алгоритмах *нижньої* матриці D приводить до більш простого вигляду (3.43) і (3.22) матриць C_1 і до більш складної структури (3.46) і (3.25) матриць C_2 , тоді як використання *верхньої* матриці D приводить до протилежного результату: структури (3.18), (3.29) матриць C_2 виявляються простіші, ніж відповідно (3.39), (3.30) для C_1 .

Трохи складніше виглядає ситуація з 4-м алгоритмом. Його реалізація для обох матриць D виявляється можливою лише в окремому випадку (3.32) і навряд чи має практичний зміст.

Відносно ж 3-го і 5-го алгоритмів доводиться констатувати їх повну непридатність у використанні для розв'язання задачі стабілізації нелінійних систем.

У результаті проведених досліджень таблицю 3.1 можна представити в остаточному вигляді табл.3.2.

Вона містить усі конструктивні алгоритми методів жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації.

3.8. Аналіз умов стабілізованості нелінійних систем

Аналіз умов стабілізованості в 1-му алгоритмі жорсткого синтезу систем стабілізації для нижньої матриці D [71] полягає в дослідженні l або $(l-1)$ -го співвідношення для прямокутних матриць розміру $k_j \times t$ у випадку (3.47), коли n некратьне t , і (3.48), коли n кратне t .

Розглянемо для визначеності випадок l співвідношень.

Введемо спочатку такі позначення для квадратних матриць m -го порядку [71]:

$$\theta_j = {}^j B_1^+ [({}^{j-1} \hat{A}_{12} - {}^{j-1} \hat{A}_{11} {}^{j-1} D_{12} - {}^{j-1} B_*^j A_{22}) {}^{j-1} D_{22}^{-1} + {}^{j-1} D_{11}^{-1} ({}^{j-1} \hat{A}_{21} - {}^j B_2 {}^{j-1} C_1)^T], \quad j = \overline{1, l-1}, \quad (3.49)$$

і відповідно

$$\begin{aligned} \theta_{k_j} = & {}^l B_1^+ [({}^{l-1} \hat{A}_{12} - {}^{l-1} \hat{A}_{11} {}^{l-1} D_{12} - {}^{l-1} B_*^l A_{22}) {}^{l-1} D_{22}^{-1} + \\ & + {}^{l-1} D_{11}^{-1} ({}^{l-1} \hat{A}_{21} - {}^l B_2^l A_{11})^T] - \frac{1}{2} {}^l B_1^+ ({}^{l-1} Q_{11} - {}^{l-1} S_{11}) ({}^l B_1^+)^T {}^l B_2^T \end{aligned} \quad (3.50)$$

Таблиця 3.2

	Алгоритми		
Рівняння	1	2	6
(a)	C_1	C_1	*
(б)	C_2	*	C_2
(в)	*	C_2	C_1

для квадратної матриці k_l -го порядку, де прийнято [67]

$${}^j B_1^+ = ({}^j B_1^T {}^j B_1)^{-1} {}^j B_1^T, \quad {}^l B_1^+ = {}^l B_1^T ({}^l B_1 {}^l B_1^T)^{-1} \quad (3.51)$$

– псевдообернені матриці.

Тоді умови стабілізованості зведуться до l співвідношень

$$0 < {}^{j-1} Q_{22} = \theta_j + \theta_j^T = \Theta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (3.52)$$

або до еквівалентних їм $n-m$ умов Сильвестра додатної визначеності матриць Θ_j . Будемо мати [30, 73]

$$\Delta_\alpha(\Theta_j(x, t, d, q)) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, l}; \quad \alpha = \overline{1, \xi}. \quad (3.53)$$

Тут $\xi = m$ для всіх $\Theta_j \in R_{m \times m}$, $j = \overline{1, l-1}$, або $\xi = k_l$, якщо $\Theta_l \in R_{k_l \times k_l}$; через Δ_α позначений головний діагональний мінор α -го порядку матриці $\Theta_j : d, q \in \mathbf{G} : \{d_{is}, q_{r\delta}(x, t) / D = \{d_{is}\} = const; i, s = \overline{1, n}; {}^{l-1} Q_{11} = \{q_{r\delta}\} \in \mathbf{R}_n \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_{\xi \times \xi}, r, \delta = \overline{1, \xi}\}$ – довільні параметри; $\gamma_j(x) > 0$ – деякі позитивно визначені функції, які, як правило, на практиці замінюються постійними величинами $\gamma_j = const > 0$ (звісно, при цьому умови (3.53) стають більш жорсткими, однак подібна заміна цілком допустима, якщо в точці $x = 0$ визначники $\Delta_\alpha(\Theta_j(0, t, d, q))$ не перетворюються в нуль $\forall t \in T$ [52]).

Структура матриць Θ_j згідно з (3.49) – (3.53) така, що їх головні діагональні мінори в загальному випадку можуть бути представлені у вигляді

$$\Delta_\alpha(\Theta_o(x, t, d, q)) = f_{j\alpha}(d, q) + p_{j\alpha}^T(d, q)v_{j\alpha}(x, t) + r_{j\alpha}^T(d, q)\omega_{j\alpha}(x, t) > \gamma_j > 0, \quad (3.54)$$

де $v, \omega : \{v_{j\alpha}(x, t), \omega_{j\alpha}(x, t) / v_{j\alpha} : \mathbf{R}_n \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_\delta, \omega_{j\alpha} : \mathbf{R}_n \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}_\rho, j = \overline{1, l}, \alpha = \overline{1, \xi}\}$ – додатно визначені і відповідно знакозмінні нелінійні вектор-функції, що

ідентифікуються в області $x \in \Omega \subset \mathbf{R}_n$, $t \in \mathbf{T}$, своїми інтервалами значень

$$0 < a_{j\alpha} \leq v_{j\alpha}(x, t) \leq b_{j\alpha}, \quad (3.55a)$$

$$-c_{j\alpha} \leq \omega_{j\alpha}(x, t) \leq e_{j\alpha} \quad (3.55b)$$

при фіксованих постійних додатних векторах $a_{j\alpha}, b_{j\alpha} \in \mathbf{R}_\delta$, $c_{j\alpha}, e_{j\alpha} \in \mathbf{R}_\rho$, так що

$f, p, r : \{f_{j\alpha}(d, q), p_{j\alpha}(d, q), r_{j\alpha}(d, q) / f_{j\alpha} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R}_1, p_{j\alpha} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R}_\delta, r_{j\alpha} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R}_\rho; d, q \in \mathbf{G}\}$ –

функції довільних параметрів d_{is} множини G постійних компонент матриці D і нелінійних по x і t (в загальному випадку) компонент матриці ${}^{l-1}Q_{11}$.

Використовуючи основні положення інтервальної арифметики [74], можна за допомогою однієї з наступних стратегій:

$$f_{j\alpha}(d, q) \rightarrow \max_G > 0, \quad p_{j\alpha}(d, q) \rightarrow \max_G > 0, \quad r_{j\alpha}(d, q) = \begin{cases} \rightarrow \min_G, & (3.56a) \\ = 0, & (3.56b) \end{cases}$$

або їх сукупності забезпечити перебування величин $\Delta_\alpha(\Theta_j)$ в додатних інтервалах

$$0 < \gamma_j < g_{j\alpha} \leq \Delta_\alpha(\Theta_j(x, t, d, q)) \leq h_{j\alpha} \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}_n, \quad t \in \mathbf{T}; \quad d, q \in \mathbf{G}, \quad (3.57)$$

де $\{g_{j\alpha}, h_{j\alpha}\} = const \in \mathbf{R}_1^+$. При цьому за обома стратегіями (3.56) необхідно максимально збільшувати вклад додатних і зменшувати, як в (3.56a) (або повністю виключити, як в (3.56b)), вклад знакозмінних інтервалів у реалізації умов (3.57).

На практиці, як правило, використовується змішана стратегія. Головна проблема тут полягає в потребі забезпечити одночасно всі $n - m$ умов (3.57) одним і тим же набором із $n(n+1)/2$ постійних компонент d_{is} , $i, s = \overline{1, n}$, матриці $D > 0$ та $\xi(\xi+1)/2$ змінних компонент $q_{\tau\delta}$, $\tau, \delta = \overline{1, \xi}$, матриці ${}^{l-1}Q_{11} > 0$. При цьому величини q можна вибирати аналітично у вигляді функцій $q_{\tau\delta} = q_{\delta\tau}(x, t, d)$ так, щоб спростити вирази (3.54), або прийняти $q_{\tau\delta} = const$, включити їх в G і використовувати разом з d_{is} як вільні постійні параметри.

Слід зазначити, що проблема аналітичного забезпечення умов (3.57) становить досить трудомістку задачу. Однак її розв'язання значно спрощується при використанні *нелінійної схеми компромісів* [75] з реалізацією через скалярну згортку частинних критеріїв (3.53) у вигляді

$$J(x, t, d, q) = \sum_{j=1}^l \sum_{\alpha=1}^{\xi} \frac{\gamma_j}{\Delta_\alpha(\Theta_j) - \gamma_j} \rightarrow m_G \quad (3.58)$$

шляхом мінімізації нелінійної функції $J(x,t,d,q)$ за параметрами $d_{is}, q_{\tau\delta} \in \mathbf{G}$, наприклад, симплекс-методом Нелдера-Міда [104].

Всі результати проведеного аналізу умов стабілізованості для випадку (3.47), коли n некротне m , виявляються справедливими і для випадку (3.48), коли n кратне m , якщо в формулах (3.49) – (3.58) величину l замінити на $l-1$ і врахувати $k_l = 0$.

Аналіз умов стабілізованості в 1-му алгоритмі жорсткого синтезу систем стабілізації для верхньої матриці D . При аналізі умов стабілізованості (3.21) для 1-го алгоритму у випадку верхньої матриці D за аналогією з (3.49)-(3.52) для відповідної матриці $\hat{\Theta}$ отримаємо умови

$$\Delta_\alpha(\hat{\Theta}_j(x,t,d,q)) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, l}; \quad \alpha = \overline{1, \xi}, \quad (3.59)$$

аналогічні (3.53). Їх реалізація повторює процедуру, викладену у формулах (3.54)-(3.58).

Аналіз умови стабілізованості для 2-го алгоритму з нижньою матрицею D . Для нього ліву частину рівняння (3.26) позначимо матрицею Ψ

$$\Psi = -[D_{22}({}^1A_{22} - {}^1B_* {}^1\hat{A}_{12}) + ({}^1A_{22} - {}^1B_* {}^1\hat{A}_{12})^T D_{22}] \quad (3.60)$$

з використанням формул (3.24), (3.17a). Тоді умови стабілізованості зведуться до нерівностей Сильвестра додатної визначеності матриці Ψ . Матимемо

$$\Delta_j(\Psi) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, k_1}, \quad k_1 = n - m, \quad (3.61)$$

де Δ_j головний діагональний мінор j -го порядку матриці Ψ ; $\gamma_j(x) > 0$ – деякі позитивно визначені функції, як і в (3.53).

Аналіз умов стабілізованості для 2-го алгоритму з верхньою матрицею D . Використаємо матрицю

$$\hat{\Psi} = -[D_{22}(\tilde{A}_{22} - {}^1\tilde{B}_* {}^1\tilde{A}_{12}) + (\tilde{A}_{22} - {}^1\tilde{B}_* {}^1\tilde{A}_{12})^T D_{22}] \quad (3.62)$$

в позначеннях (3.17б), (3.28) і запишемо для неї умови позитивної визначеності у вигляді

$$\Delta_j(\hat{\Psi}) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, k_1}, \quad k_1 = n - m, \quad (3.63)$$

аналогічному (3.61).

Аналіз умов стабілізованості в 6-му алгоритмі з верхньою матрицею коефіцієнтів D . Якщо з урахуванням (3.20) позначити

$$\Lambda = -[D_{11}(\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_* \hat{A}_{21}) + (\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_* \hat{A}_{21})^T D_{11}], \quad (3.64)$$

то умова стабілізованості (3.41) при цьому, як і для 1-го та 2-го алгоритмів, зведеться до умов Сильвестра додатної визначеності матриці Λ . Матимемо

$$\Delta_j(\Lambda) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, k_1}, \quad k_1 = n - m. \quad (3.65)$$

Умова стабілізованості для 6-го алгоритму з нижньою матрицею коефіцієнтів D . Позначимо ліву частину рівняння (3.45) через матрицю $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = -[D_{11}({}^1A_{11} - \hat{B}_* {}^1\hat{A}_{21}) + ({}^1A_{11} - \hat{B}_* {}^1\hat{A}_{21})^T D_{11}] \quad (3.66)$$

з використанням формул (3.44).

Умови позитивної визначеності цієї матриці зададуться нерівностями

$$\Delta_j(\hat{\Lambda}) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, k_1}, \quad k_1 = n - m. \quad (3.67)$$

Для аналітичного забезпечення умов (3.61), (3.63), (3.65), (3.67) скористаємось нелінійною схемою компромісів

$$J_1(x, \mathbf{G}) = \sum_{j=1}^l \frac{\gamma_j}{\Delta_j(\Phi) - \gamma_j} \rightarrow \min_{\mathbf{G}} \quad (3.68)$$

з мінімізацією нелінійної функції $J_1(x, \mathbf{G})$ на множині \mathbf{G} методом Нелдера-Міда [104]. Тут $\Phi \in \{\Psi, \hat{\Psi}, \Lambda, \hat{\Lambda}\}$.

3.9. Оптимальна стабілізація нелінійних систем

Розглянуті методи жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації дозволяють синтезувати управління за зворотним зв'язком, що забезпечує стабілізацію нелінійних (квазілінійних) систем вигляду (2.19).

Управління, які синтезуються за виразами (2.18), допускають певну довільність розв'язання задачі стабілізації, оскільки залежать від довільних матриць $Q_j + S_j$ (це видно, зокрема, з формули (2.36)). Таку довільність можна, зокрема, усунути, якщо вимагати, щоб стабілізуюче управління забезпечувало

не лише асимптотичну (рівномірно асимптотичну) стійкість (стійкість у великому, в цілому, за частиною змінних тощо) системи, але й найкращу якість перехідного процесу при найменших затратах енергетичних ресурсів, що витрачаються на реалізацію процедури стабілізації об'єкта управління.

Подібні вимоги можна врахувати шляхом мінімізації деякого інтегрального критерію якості

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} \omega(x, u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.69)$$

причому

$$\omega(x, u, t) > 0 \quad (3.70)$$

– задана позитивно визначена функція.

У зв'язку з цим ставиться задача оптимальної стабілізації [8]: знайти управління $u = u(x, t)$, котре забезпечує стійкість (у певному розумінні) замкнутої системи, а також мінімізує функціонал (3.69).

Таке управління називається *оптимальним стабілізуючим* і позначається

$$u_{opt} = u_{opt}(x_{opt}, t). \quad (3.71)$$

Йому відповідає оптимальна траєкторія $x_{opt} = x_{opt}(t, x_0)$ вихідної системи (2.19), і які б не були інші стабілізуючі управління $u = u(x, t)$, виконується нерівність

$$I(x_{opt}, u_{opt}) \leq I(x, u). \quad (3.72)$$

Справедлива *теорема* [17], яку для умов, що розглядаються, можна сформулювати так: якщо для системи (2.19) можна вказати позитивно визначену квадратичну форму $V_{opt}(x, t)$ з (2.21), яка допускає нескінченно малу вищу границю, та функцію управління $u_{opt}(x, t)$, і для позитивно визначеної функції $\omega(x, u_{opt}, t) > 0$ з інтегрального критерію якості (3.70) на траєкторіях системи (2.19) буде виконуватись рівність

$$\dot{V}_{opt}(x, u_{opt}, t) + \omega(x, u_{opt}, t) = 0, \quad (3.73)$$

а при інших стабілізуючих управліннях $u(x, t)$ буде справедлива нерівність

$$\dot{V}_{opt}(x, u, t) + \omega(x, u, t) \geq 0, \quad (3.74)$$

то управління (3.71) розв'язує задачу оптимальної стабілізації, причому з урахуванням (3.69) виконується умова

$$I(x_{opt}, u_{opt}) = \min_{u \in U} I(x, u) = V_{opt}(t_0, x_0). \quad (3.75)$$

Синтез оптимального стабілізуючого управління u_{opt} можна здійснити, застосовуючи, наприклад, метод динамічного програмування. Тоді для задачі оптимальної стабілізації функцією Белмана буде функція $V(x, t)$, що дорівнює інфімуму (точній нижній границі) функціоналу (3.69) на будь-яких стабілізуючих управліннях $u \in U \subset \mathbf{R}_m$, так що

$$V(x, t) = \inf_{u \in U} \int_{t_0}^{\infty} \omega(x, u, t) dt, \quad (3.76)$$

або, якщо V безперервно диференційована, то вона буде згідно з (3.76) розв'язком рівняння Белмана

$$\inf_{u \in U} [\dot{V}(x, u, t) + \omega(x, u, t)] = 0 \quad (3.77)$$

при нульовій крайовій умові.

Якщо рівняння Белмана (3.77) переписати для квадратичної форми (2.21), (2.22) псевдолінійної системи (2.19) і квадратичного критерію якості

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T P(x, t)x + u^T R^{-1}u) dt, \quad (3.78)$$

де $P^T = P \geq 0$, $R^T = R > 0$, то в результаті будемо мати

$$\inf_{u \in U} [x^T (\dot{D} + DA + A^T D)x + x^T DBu + u^T B^T Dx + x^T Px + u^T R^{-1}u] = 0. \quad (3.79)$$

Щоб знайти управління u як розв'язок задачі (3.79), достатньо прирівняти нулю частинну похідну по u виразу, що стоїть у квадратних дужках. У результаті отримаємо $x^T DB + u^T R^{-1} = 0$, звідки

$$u = u_{opt} = -RB^T Dx. \quad (3.80)$$

Підставляючи u_{opt} з (3.80) у (3.79), одержимо для матриці D рівняння

$$\dot{D} + DA + A^T D - DBRB^T D = -P, \quad (3.81)$$

для якого повинна задаватися певна гранична умова.

Рівняння (3.81) аналогічне добре відомому рівнянню Ріккати

$$\frac{dy}{dx} + \alpha(x)y + \beta(x)y^2 = \gamma(x).$$

Тому його називають *матричним рівнянням Ріккати*.

Оптимальне управління (3.80) забезпечує стабілізацію замкнутої системи (2.19) і мінімізує квадратичний функціонал якості (3.78) [17, 80], причому мінімальне значення критерію якості буде визначатися виразом

$$I(x, u_{opt}) = x_{opt}^T D(t_0) x_{opt} = V(x_0, t_0), \quad (3.82)$$

а матриця D як розв'язок матричного рівняння Ріккати (3.81) повинна бути симетричною невід'ємно визначеною матрицею коефіцієнтів квадратичної форми (2.21).

Для стаціонарного випадку лінійних об'єктів задача оптимального керування як задача *аналітичного конструювання регуляторів* була сформульована й розв'язана О.М. Летовим у статтях [16].

Одночасно з ними в 1960 році була опублікована робота Р. Калмана [107], в якій дещо іншим методом була розв'язана задача оптимального керування для лінійного нестационарного об'єкта.

Бібліографія з цього питання настільки численна, що навіть перерахувати найбільш відомі та значимі публікації немає ніякої можливості. До того ж, у роботі використовуються, зокрема, лише результати О.А. Красовського [81].

Тут необхідно звернути увагу на не досить коректний підхід до оптимізації синтезованого управління, що іноді застосовується окремими авторами, зокрема, в роботах [41, 56], де у випадку управління із структурою, відмінною від (3.80), для квадратичної форми V , побудованої в процесі розв'язання задачі синтезу, використовується рівняння $\dot{V}_* + x^T P x + u_*^T R u_* = 0$ для функції Белмана, хоч далеко не кожна функція Белмана може бути оптимальною функцією Ляпунова

[19], що дозволяє розв'язувати задачу оптимальної стабілізації. Зворотній зв'язок тільки тоді оптимальний щодо мінімуму функціоналу

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} [x^T P(x, t)x + u^T R(t)u] dt \rightarrow \inf_{u \in U},$$

коли його матриця підсилення $C(x, t)$ в

задачах оптимальної стабілізації має структуру (3.80) [20, 21]. Лише тоді

квадратична форма $V = x^T D(t)x$ буде одночасно задовольняти і рівняння Ляпунова $\dot{V} = -W < 0$, і рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана $\dot{V}_* + x^T P x + u_*^T R u_* \leq 0$, будучи оптимальною функцією Ляпунова [17].

3.10. Оптимальна стабілізація нелінійних систем за критерієм узагальненої роботи

Замість стандартного квадратичного критерію якості (3.78) О.А. Красовський запропонував для розв'язання задачі оптимальної стабілізації використовувати *критерій узагальненої роботи* у вигляді [81]

$$I(x, u, u_{opt}) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T P(x, t)x + u^T R^{-1}u + x^T D B R B^T D x) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.83)$$

який можна переписати у вигляді

$$I(x, u, u_{opt}) = \int_{t_0}^{\infty} [x^T (P + D B R B^T D)x + u^T R^{-1}u] dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.84)$$

або, ввівши позначення

$$P_* = P + D B R B^T D, \quad (3.85)$$

відповідно

$$I(x, u, u_{opt}) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T P_* x + u^T R^{-1}u) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.86)$$

Порівнюючи (3.86) з (3.78), неважко впевнитись, що задача оптимальної стабілізації системи (2.19) з критерієм узагальненої роботи (3.86) буде реалізовуватись оптимальним управлінням

$$u_{opt} = -R^{-1} B^T D x \quad (3.87)$$

з (3.80), в якому матриця D буде розв'язком матричного рівняння Ріккати

$$\dot{D} + D A + A^T D - D B R B^T D = -P_*, \quad (3.88)$$

яке з урахуванням позначення (3.85) перетвориться відповідно в рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + D A + A^T D = -P \quad (3.89)$$

для розімкнутої системи (2.13).

Таким чином, запропонований в [81] підхід до розв'язання задачі оптимальної стабілізації систем можна вважати як формальне перенесення квадратичного члена з матричного рівняння Ріккати (3.81) у критерій якості (3.78). Тоді рівняння Ріккати (3.81) перетворюється в рівняння Ляпунова (3.89), а квадратичний критерій якості (3.78) – в критерій узагальненої роботи (3.84).

Наявність рівняння (3.89) свідчить про необхідність виконання досить суттєвої умови, що накладається на розімкнуту систему (2.13): вона повинна бути асимптотично стійкою. Ця умова виявилася стримуючим фактором при застосуванні синтезу оптимального управління за критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського, бо переважна більшість об'єктів без управління нестійка.

В дисертаційній роботі розглядаються *два* шляхи, що дозволяють обійти цю проблему. За *першим* з них стабілізуюче управління, синтезоване одним з методів жорсткого синтезу нелінійних систем, примусово вкладається в структуру оптимального управління (якщо це виявляється можливим). За *другим* – до вже застабілізованої системи додається оптимальне управління по тому ж тракту, що й стабілізуюче, причому воно, не порушуючи стабілізацію системи, забезпечує мінімум квадратичного критерію якості. Переходячи безпосередньо до розгляду переваг методу аналітичного конструювання за критерієм узагальненої роботи (3.83), спочатку звернемо увагу на *розрахункові переваги* [81]:

- Для побудови оптимальних управлінь (3.87) необхідно розв'язувати лінійне рівняння Ляпунова (3.89).
- Для побудови оптимальних управлінь (3.80) необхідно розв'язувати нелінійне рівняння Ріккати (3.81).
- Розрахункові труднощі розв'язання нелінійних рівнянь типу (3.81) досить великі порівняно з розв'язанням лінійних рівнянь виду (3.89). Особливо це відноситься до найбільш важливих для практики задач високої розмірності нелінійних об'єктів і найбільш важкого випадку нетермінальних управлінь, коли гранична умова для шуканого розв'язку

відсутня. Для цього найбільш поширеного випадку потрібно знайти примусовий розв'язок рівняння в частинних похідних, що визначається правою частиною і не залежить від граничних умов. Для нелінійного рівняння виду (3.81) існує множина таких розв'язків, одні з яких стійкі, інші нестійкі. Для рівняння (3.89), як правило, існує один-єдиний примусовий розв'язок.

- Ця перевага методу аналітичного конструювання, що базується на мінімізації функціоналу узагальненої роботи $I(x, u, u_{opt})$, має принципове значення. Річ у тім, що практично процес аналітичного конструювання є звичайно ітераційним, що потребує неоднократного розв'язання відповідних рівнянь (3.81) або (3.89). Визначений на першому (вихідному) етапі функціонал лише у виняткових випадках дає розв'язок, що задовольняє потреби користувача з усіх точок зору. Найчастіше, отриманий розв'язок потребує коректування стосовно численних додаткових практичних вимог, іноді навіть таких, що не підлягають точній формалізації. Тому після отримання першого розв'язку виникає потреба в коректуванні функціоналу (зміні його коефіцієнтів) і в повторному розв'язанні задачі. Це може повторюватись декілька разів. Чим простіша побудова однократного розв'язку задачі, тим успішніше здійснюється подібний ітераційний процес. Лінійність же рівняння (3.89) дозволяє знаходити загальні закономірності оптимальних управлінь і здійснювати цілеспрямоване коректування функціоналу суттєво простішими процедурами.

Окрім розрахункових переваг, важливе значення має *якість процесів* управління в оптимальних системах, синтезованих тим чи іншим методом.

Шляхом застосування відповідних засобів *якість перехідних процесів* в оптимальних системах, синтезованих за критеріями (3.78) і (3.83), може бути зроблена приблизно рівноцінною.

У відношенні *точності* в сталому режимі під дією шумів системи, оптимальні за критерієм Калмана (3.78), мають деяку перевагу над системами, оптимальними за критерієм (3.83).

3.11. Жорстка оптимальна стабілізація нелінійних систем

Застосуємо до вихідної системи (2.19) шостий алгоритм синтезу нелінійних систем стабілізації з табл.3.2.

Використовуючи нижні матриці D , Q (3.7), (3.13) коефіцієнтів квадратичних форм V , W з (2.21), (2.22), синтезуємо матрицю управління C вигляду (3.43), (3.46).

З метою оптимізації цього побудованого стабілізуючого управління можна спробувати підкорити його оптимізаційній структурі (3.80), тобто прирівняти його до виразу

$$C = [C_1, C_2] = R [B_1^T, B_2^T] \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}D_{12} \\ D_{12}^T D_{11} & D_{12}^T D_{11} D_{12} + D_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

вважаючи V оптимальною квадратичною формою.

З отриманих рівностей

$$\begin{aligned} C_1 &\rightarrow B_2^{-1} [{}^1\hat{A}_{21} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22}) \hat{B}_*^T D_{11}] = \\ &= R(B_1^T D_{11} + B_2^T D_{12}^T D_{11}), \end{aligned} \quad (3.91a)$$

$$\begin{aligned} C_2 &\rightarrow B_2^{-1} [{}^1A_{22} + {}^1\hat{A}_{21} D_{12} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22}) D_{22} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22}) \hat{B}_*^T D_{11} D_{12}] = \\ &= R(B_1^T D_{11} D_{12} + B_2^T D_{12}^T D_{11} D_{12} + B_2^T D_{22}), \end{aligned} \quad (3.91б)$$

в яких для зручності позначено

$$\begin{aligned} {}^1A_{22} &= A_{22} - A_{21} D_{12}, \quad {}^1B_1 = B_1 + D_{12} B_2; \\ {}^1\hat{A}_{21} &= A_{21} + D_{22}^{-1} (A_{12}^T - D_{12}^T A_{11}^T - {}^1A_{22}^T \hat{B}_*^T) D_{11}, \quad \hat{B}_* = {}^1B_1 B_2^{-1}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

причому в (3.108)

$$S_{11}^T = -S_{11} \in \mathbf{R}_{(n-m) \times (n-m)}, \quad S_{22}^T = -S_{22} \in \mathbf{R}_{m \times m} \quad (3.93)$$

– довільні кососиметричні матриці відповідного розміру, отримаємо з (3.91)

після нескладних перетворень такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
& D_{11} \hat{B}_*^T \hat{A}_{21} + {}^1 \hat{A}_{21}^T \hat{B}_*^T D_{11} = D_{11} \hat{B}_* (Q_{22} + 2B_2 R B_2^T) \hat{B}_*^T D_{11} > 0, \\
& (D_{22} + \hat{B}_*^T D_{11} D_{12})^T ({}^1 A_{22} + {}^1 \hat{A}_{21} D_{12}) + ({}^1 A_{22} + {}^1 \hat{A}_{21} D_{12})^T (D_{22} + \hat{B}_*^T D_{11} D_{12}) + D_{22} Q_{22} D_{22} = \\
& = (\hat{B}_*^T D_{11} D_{12})^T Q_{22} \hat{B}_*^T D_{11} D_{12} + (D_{22} + \hat{B}_*^T D_{11} D_{12})^T B_2 R B_2^T (D_{22} + \hat{B}_*^T D_{11} D_{12}) > 0,
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Умови (3.94) встановлюють зв'язок між блоками матриць A і B з (3.92) в замкнутій системі (2.19) і блоками матриць D і Q з (3.8), (3.13) з матрицею R з критерію якості (3.83).

Становить певний інтерес підхід до розв'язання проблеми оптимальної стабілізації, запропонований в [19, 21, 64]. Він полягає в адитивному введенні в попередньо стабілізовану систему оптимального управління, яке реалізується тими ж каналами, що й стабілізуюче управління. Тоді будемо мати

$$\dot{x} = \{A(x, t) - B(x, t)[C(x, t) + K(x, t)]\}x. \tag{3.95}$$

У системі (3.95) побудуємо оптимальне управління

$$u_{opt} = -K(x, t)x \tag{3.96}$$

за критерієм узагальненої роботи (3.83) після того, як вона вже буде стабілізована методом жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації, наприклад, шостим алгоритмом з верхньою матрицею D .

Тоді, використовуючи критерій узагальненої роботи у вигляді (3.84) і синтезуючи оптимальне управління u_{opt} згідно з (3.87), для матриці D в ньому замість рівняння (3.89) будемо мати рівняння Ляпунова

$$D(A - BC) + (A - BC)^T D = -P \tag{3.97}$$

для гарантовано стійкої замкнутої системи (2.19).

Порівнюючи (3.97) з аналогічним рівнянням Ляпунова (3.2)

$$D(A - BC) + (A - BC)^T D = -Q, \tag{3.98}$$

отримаємо

$$P = Q \tag{3.99}$$

і матрицю D , яка визначається виразом (3.10).

Тоді матриця підсилення K в оптимальному за критерієм оптимальної роботи регуляторі буде задаватись рівністю

$$K = R B^T D, \tag{3.100}$$

або з урахуванням формул (3.4), (3.10) відповідно

$$K = R \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} + D_{21}^T D_{22} D_{21} & D_{21}^T D_{22} \\ D_{22} D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

так що для

$$K = [K_1, K_2] \quad (3.102)$$

з (3.101) отримаємо

$$\begin{aligned} K_1 &= R(B_1^T D_{11} + B_1^T D_{21}^T D_{22} D_{21} + B_2^T D_{22} D_{21}), \\ K_2 &= R(B_1^T D_{21}^T D_{22} + B_2^T D_{22}), \end{aligned} \quad (3.103)$$

або, застосовуючи позначення (3.17б), рівність (3.103) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} K_1 &= R(B_1^T D_{11} + \tilde{B}_2^T D_{22} D_{21}), \\ K_2 &= R\tilde{B}_2^T D_{22}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Тоді сумарне управління в замкнутій системі (3.95) на основі формул (3.103), (3.104) буде визначатися співвідношеннями

$$\begin{aligned} C_1 + K_1 &= \tilde{B}_2^{-1} [\hat{A}_{21} + \tilde{A}_{22} D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}D_{21} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22})\tilde{B}_2^T D_{11}] + R(B_1^T D_{11} + \tilde{B}_2^T D_{22} D_{21}), \\ C_2 + K_2 &= \tilde{B}_2^{-1} [\tilde{A}_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}] + R\tilde{B}_2^T D_{22}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

та гарантуватиме не лише рівномірну асимптотичну стійкість системи (3.95), але й мінімум функціоналу якості (3.83) за умови (3.99).

Формули (3.104), (3.105) разом з позначеннями (3.92) реалізуються у відповідному блоці САПР (оптимізації регулятора).

3.12. Запровадження САПР оптимальної стабілізації нелінійних систем

Узагальнений алгоритм побудови САПР оптимальної стабілізації нелінійних об'єктів зображено на рис. 3.1. Можливі два варіанти розв'язку цієї задачі: з розглядом задачі спостереження (наприклад, як для штучного супутника Землі в цій роботі) та без побудови спостережника (наприклад, математичний маятник в даній дисертації). Першим етапом побудови САПР оптимальної стабілізації нелінійних об'єктів є отримання технічного завдання на об'єкт проектування. Наступний етап: вибір математичної моделі та методу проектування. Далі – розв'язок задачі стабілізації. У випадку, коли розглядається задача спостереження, одночасно з вищезгаданими етапами

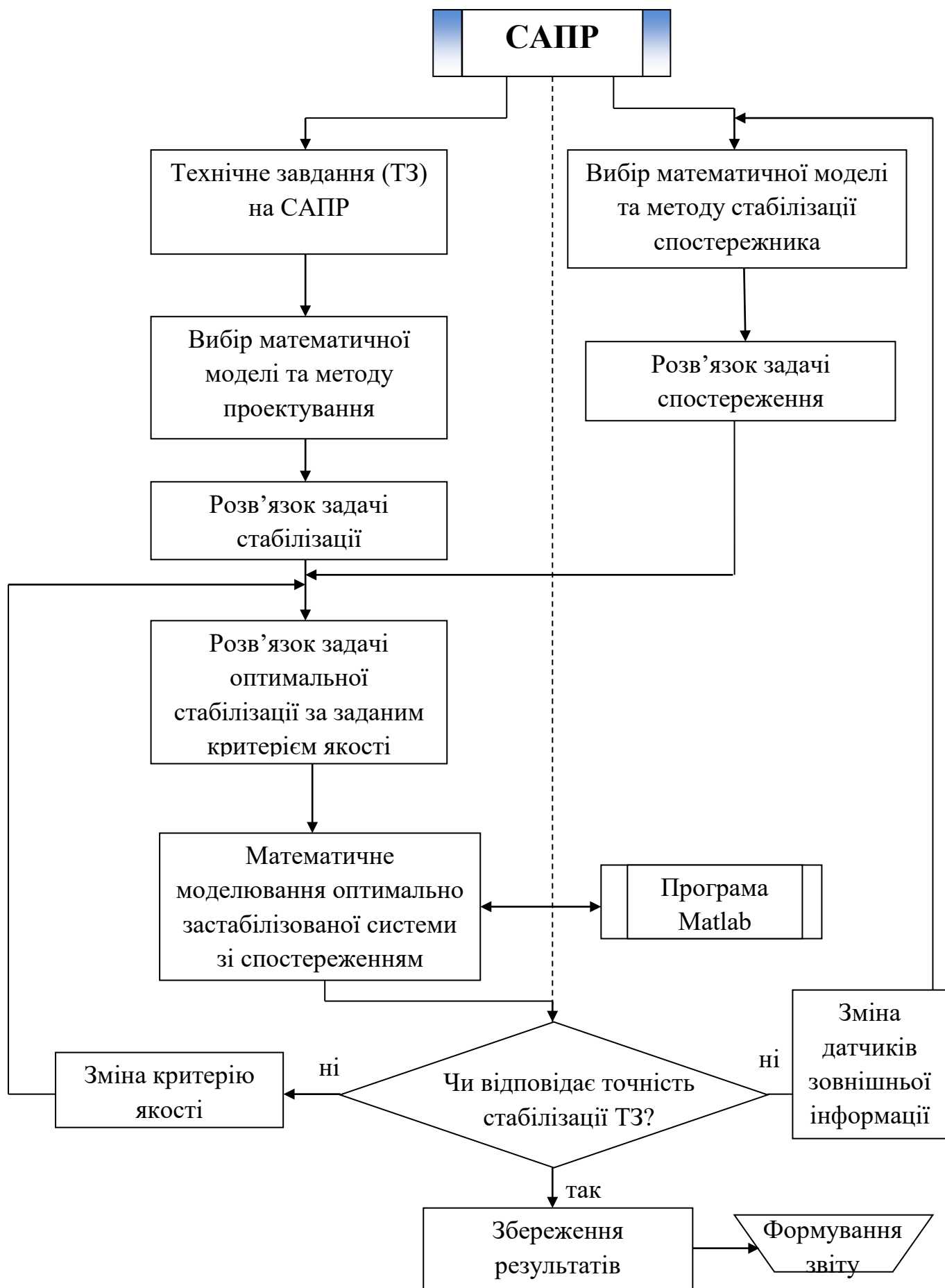


Рис. 3.1. САІР оптимальної стабілізації нелінійних об'єктів.

виконується вибір математичної моделі та методу стабілізації спостережника та розв'язок задачі спостереження.

Потім, знаходиться розв'язок задачі оптимальної стабілізації за заданим критерієм якості. За допомогою програми Matlab проводиться математичне моделювання оптимально застабілізованої системи зі спостереженням. Наприкінці, виконується порівняння відповідності точності стабілізації технічному завданню. При досягненні відповідності результати зберігаються в базі даних САПР. У випадку, коли задана точність не досягнута, то або змінюється критерій якості і задача оптимальної стабілізації розв'язується знову, чи змінюються датчики зовнішньої інформації і задача спостереження розв'язується знову.

Основні результати розділу опубліковані автором в роботах [2, 4, 5, 6-8, 76, 82-84].

3.13. Висновки до розділу 3

1. В розділі виконана реалізація третього, четвертого і п'ятого підготовчих етапів розв'язання задачі побудови САПР стабілізуючих регуляторів нелінійних об'єктів шляхом дослідження і порівняльного аналізу шести методів прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації та оптимізації трьох із них, що виявились конструктивними.
2. У випадку квадратної неособливої матриці B , коли існує обернена до неї матриця B^{-1} , синтез матриці управління C завжди можна реалізувати методом кососиметризації рівняння Ляпунова.
3. Коли матриця B прямокутна, вважалось, що процедуру синтезу матриці C можна виконати *шістьма* методами прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації. З них був досліджений лише 1-й (для нижньої матриці D) і частково 6-й (стосовно лінійних нестационарних систем, канонічних за управлінням) методи ПЖС НСС (за класифікацією С.М. Онищенко).
4. У дисертаційній роботі досліджено 1-й метод ПЖС НСС з верхньою матрицею D квадратичної форми; показано, що він придатний для

синтезу нелінійних систем стабілізації, причому ідентифікація матриці управління C здійснюється на l (чи відповідно на $l-1$) етапах рекурентною процедурою, а умова стабілізованості зводиться до умов Сильвестра.

5. Дослідження 2-го методу ПЖС НСС як з нижньою, так і з верхньою матрицями D квадратичної форми V виявили, що його можна використовувати для розв'язання задач синтезу нелінійних систем, причому матриця управління C синтезується на єдиному (першому) етапі.
6. У дисертаційній роботі досліджено 6-й метод ПЖС НСС, який і з верхньою, і з нижньою матрицями D квадратичної форми виявився придатним також і для синтезу нелінійних систем стабілізації (а не тільки для лінійних нестационарних систем, канонічних за керуванням, як вважалося раніше), а матриця управління при використанні цього методу синтезується на першому етапі з єдиною умовою стабілізованості.
7. Застосування в 2-му і 6-му алгоритмах нижньої матриці D приводить до більш простого вигляду матриць C_1 і до більш складної структури матриць C_2 , тоді як використання верхньої матриці D приводить до протилежного результату: структури матриць C_2 виявляються простішими за структури матриць C_1 .
8. Аналіз усіх шести методів ПЖС НСС, що був виконаний в роботі, виявив придатними з них для синтезу нелінійних систем стабілізації лише 1-й, 2-й та 6-й.
9. Аналіз умов стабілізованості 1-го, 2-го та 6-го алгоритмів показав, що в кожному випадку ці умови зводяться до умов Сильвестра позитивної визначеності відповідних допоміжних матриць, які можна задовольнити, скориставшись нелінійною схемою компромісів, шляхом її мінімізації, зокрема, методом Нелдера-Міда.
10. Виконано порівняльний аналіз традиційного методу Калмана синтезу оптимального регулятора за квадратичним критерієм якості та методу О.А. Красовського за критерієм узагальненої роботи:
 - Метод Калмана вимагає інтегрування матричного рівняння Ріккати.

- О.А. Красовський запропонував включити квадратичний член матричного рівняння Ріккати в квадратичний критерій якості третім доданком, перетворивши його тим самим на критерій узагальненої роботи, а рівняння Ріккати – в рівняння Ляпунова.

11. Метод О.А. Красовського свого часу не знайшов широкого застосування, бо вимагає асимптотичної стійкості вихідної розімкнутої системи (практично він не прийнятний для керування нестійким об'єктом). Але в поєднанні з методами ПЖС НСС він виявився досить ефективним, бо методи ПЖС НСС забезпечують своїм синтезом матриці керування C справедливість матричного рівняння Ляпунова навіть у випадку стаціонарної матриці D . Отже, ця матриця D із заданою жорсткою структурою виявляється оптимальною за критерієм узагальненої роботи і однозначно визначає структуру оптимального регулятора.

12. Було досліджено два можливі підходи до оптимізації стабілізуючого управління методами ПЖС НСС:

- ❖ За першим з них матриця C формально прирівнювалась до матриці K оптимальної стабілізації, але цей підхід виявився не досить конструктивним, бо супроводжується занадто специфічними умовами, що накладаються на блоки матриці коефіцієнтів системи.
- ❖ Більш вдалим виявився підхід адитивного приєднання матриці K до матриці C , у результаті чого сумарна матриця $C + K$ забезпечує не лише стабілізацію нелінійної системи, але й мінімізує критерій узагальненої роботи.

Результати розділу використані в публікаціях у наукових виданнях.

Список публікацій здобувача:

1. Сусол М.Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // Тезисы международной конференции “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” / 22 – 25 мая, 2007 г.. – К.: КНУ. – 2007. – С. 76.
2. Малоед М.Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных

динамических систем / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Збірка доповідей VII Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки» / 23-24 квітня 2009 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2009. – С. 145 – 151.

3. Малоед М.М. Стабілізація нелінійних систем оптимальними методами прямого жорсткого синтезу / М.М. Малоед, С.М. Онищенко // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6, №3. – С. 169 – 177.
4. Малоед М.Н. Методы жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации и их аддитивная оптимизация / М. Н. Малоед // Материалы X Международной конференции (5 – 10 июня 2008 года) «Устойчивость, управление и динамика твердого тела». – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ. – 2008. – С. 135 – 136.
5. Малоед М.Н. Жесткие методы оптимальной стабилизации нелинейных систем / М.Н. Малоед // Материалы IX Крымской Международной математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Таврический национальный ун-т. – Симферополь. – 2008. – С. 111.
6. Малоед М.М. Адитивна оптимальна стабілізація нелінійних систем методами жорсткого синтезу / М.М. Малоед // Автоматика-2008: доповіді XV міжнародної конференції з автоматичного управління, 23 – 26 вересня 2008 р. – Одеса: ОНМА. – С. 858 – 861.

РОЗДІЛ 4

АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНО ЗАСТАБІЛІЗОВАНОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

4.1. Стабілізація математичного маятника

Як ілюстрація до реалізації САПР оптимальних систем стабілізації нелінійних об'єктів розглядається задача оптимальної стабілізації математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги.

Математичний маятник — теоретична модель маятника, в якій матеріальна точка масою m підвішена на невагомому нерозтяжному стержні довжини h і здійснює рух у вертикальній площині під впливом сил тяжіння з прискоренням g [85]. Модель (рис. 4.1) нехтує розмірами тіла, деформацією підвісу та тертям в точці підвісу стержня. Звичайно розглядаються коливання маятника в одній площині.

Положення рівноваги маятника. Математичний маятник має два положення рівноваги: стійке та нестійке.

В стійкому положенні рівноваги стержень маятника направлений вертикально вниз, сила тяжіння врівноважується силами пружності стержня та реакції зв'язку в точці підвісу. Якщо відвести маятник від положення рівноваги або надати йому початкову швидкість, виникають коливання. Сили тертя, що діють на реальний маятник, приводять до згасання коливань та знов повертають його в початкове положення. Саме тому воно вважається *стійким*.

Інше положення рівноваги математичного маятника знаходиться в точці $\phi = \pi$, коли його стержень направлений вертикально вгору. В цьому положенні сили тяжіння, реакції зв'язку та пружності стержня, як і в точці стійкої рівноваги, зрівноважені, проте ця рівновага є *нестійкою*. При найменшому відхиленні від вертикального положення рівнодійна сил, що діють на маятник, виводить його з рівноваги. Реальний маятник вже ніколи не повернеться в це положення. Підтримати маятник у вертикальному положенні можна лише за допомогою балансування, яке зводиться до особливих рухів точки опори або з допомогою прикладеного до маятника управління.

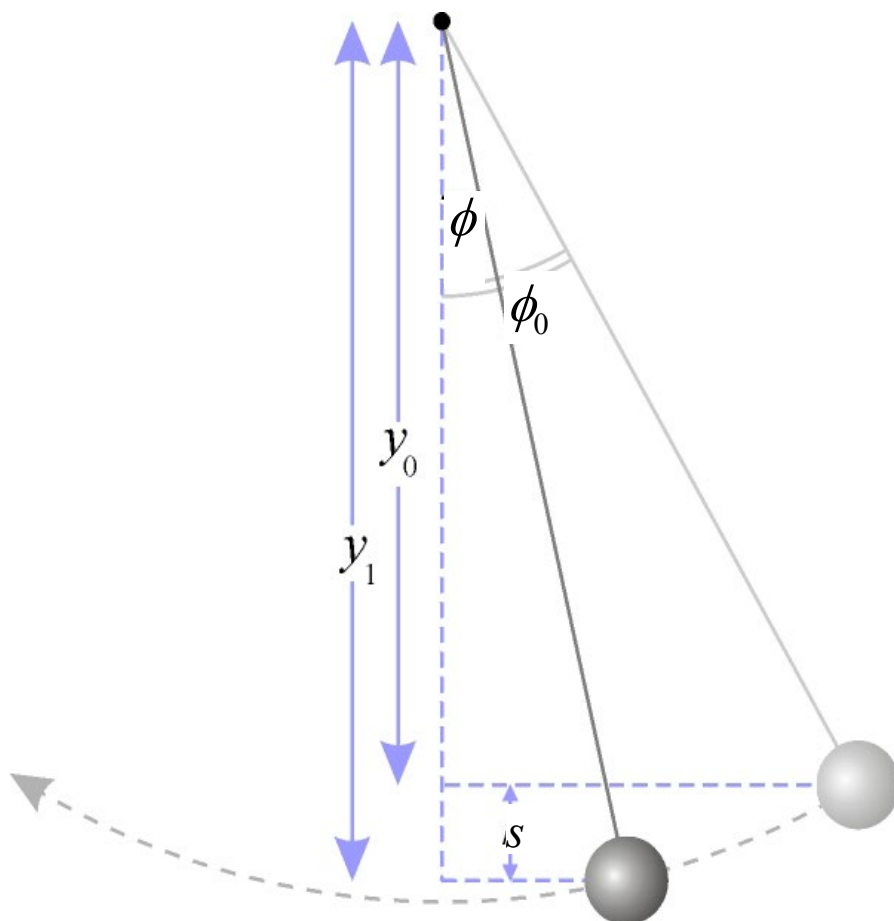


Рис. 4.1. Фізична модель руху математичного маятника.

В першу чергу слід зазначити, що розв'язувана далі задача стабілізації математичного маятника розглянута як приклад, який ілюструє можливість та доцільність реалізації методу ПЖС для нелінійних систем стабілізації. Адже цю задачу можна розв'язати набагато простіше, наприклад, методом модального управління [24].

Задача оптимальної стабілізації математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегруючим управляючим органом була розглянута в лінеаризованій постановці М.М. Красовським [17], а неоптимальний регулятор у нелінійному варіанті цієї задачі був синтезований методом ПЖС С.М. Онищенком [1].

Скористаємось одержаними в третьому розділі роботи результатами для оптимізації синтезованого ним стабілізуючого управління. З цією метою в рівнянні $\ddot{\phi} + \frac{g}{h} \sin \phi = 0$ вільних коливань математичного маятника [85], в якому ϕ – кут його відхилення від вертикалі в нижньому (стійкому) положенні рівноваги, h – довжина маятника, g – прискорення сили тяжіння, прийmemo $g = h$, $\phi = \pi + x_1$. Потім за допомогою методики [23] запишемо рівняння

$$\ddot{x}_1 - s \int_{t_0}^t u(x_1, \dot{x}_1) d\tau \quad (4.1)$$

коливань математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегральним керуванням в псевдолінійній формі. Будемо мати

$$\dot{x} = (A - bc^T)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.2)$$

Тут

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3a)$$

$$u = -c^T x, \quad c^T = [c_1, c_2, c_3], \quad (4.3b)$$

$$A - bc^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a(x) & 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix}, \quad (4.3в)$$

$$a(x) = \frac{\sin x_1}{x_1}. \quad (4.3z)$$

Матриці D і Q відповідно до (3.8) і (3.13) вибираємо у вигляді [1]

$$D = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}^2 d_3 & d_{11}^2 p \\ d_{11}^2 d_3 & d_{11}^2 d_3^2 + d_4^2 & d_{11}^2 p d_3 + d_2 d_4^2 \\ d_{11}^2 p & d_{11}^2 p d_3 + d_2 d_4^2 & d_{11}^2 p^2 + d_2^2 d_4^2 + d_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$Q = 2 \begin{bmatrix} d_{11}^2 q_{11}^2 & d_{11}^2 q_{11}^2 d_3 & d_{11}^2 q_{11}^2 p \\ d_{11}^2 q_{11}^2 d_3 & d_{11}^2 q_{11}^2 d_3^2 + d_4^2 q_2^2 & d_{11}^2 q_{11}^2 d_3 p + d_2 d_4^2 q_2^2 \\ d_{11}^2 q_{11}^2 p & d_{11}^2 q_{11}^2 d_3 p + d_2 d_4^2 q_2^2 & d_{11}^2 q_{11}^2 p^2 + d_2^2 d_4^2 q_2^2 + d_{22}^2 q_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

де для зручності позначено

$$p = d_1 + d_2 d_3. \quad (4.6)$$

Далі для системи (4.2) з урахуванням матриць (4.3) – (4.5) розглянемо рівняння Ляпунова

$$D(A - bc^T) + (A - bc^T)^T D = -Q. \quad (4.7)$$

Оскільки в системі (4.2) n кратне m ($n = 3, m = 1$) і $l = 3$, то розв'язок її нелінійної задачі стабілізації методом ПЖС НСС реалізується на двох етапах з двома умовами стабілізованості.

Зокрема, для вибраних значень параметрів матриці D з (4.4) у вигляді

$$d_{11} = 1, \quad d_1 = -d_2^2, \quad d_3 = 2d_2, \quad d_4 = d_2, \quad d_{22} = d_2^2, \quad p = d_2^2 \quad (4.8)$$

в роботі [1] був побудований регулятор з матрицею підсилення

$$c_1 = \frac{q_{11}^2 + 2d_2 a}{d_2^2}, \quad c_2 = \frac{1 + d_2 q_{11}^2 - d_2^2 a}{d_2^2}, \quad c_3 = \frac{1}{1 + d_2^2} \left[\frac{1}{d_2} + (1 + 3d_2^2) q_{11}^2 + 3d_2 (1 + d_2^2) a \right] \quad (4.9)$$

та умовами стабілізованості

$$q_2^2 = \frac{1}{d_2} - q_{11}^2(x) - 3d_2 a(x) > 0, \quad q_{22}^2 = -\frac{d_2}{1 + d_2^2} + \frac{1 + 3d_2^2}{1 + d_2^2} q_{11}^2(x) + 6d_2 \frac{1 + 2d_2^2}{1 + d_2^2} a(x) > 0, \quad (4.10)$$

що залежать лише від двох параметрів: довільних констант d_2, q_{11}^2 або від константи d_2 і функції $q_{11}^2(x) > 0$.

Для існування скінченного керування в (4.9) необхідне виконання умови

$$d_2 \neq 0. \quad (4.11)$$

Якщо, зокрема, покласти

$$q_{11}^2(x) = \frac{1}{2d_2} - 3d_2 a(x) > 0, \quad (4.12)$$

тоді з (4.10) отримаємо

$$q_2^2 = \frac{1}{2d_2} = c > 0, \quad q_2^2(x) = \frac{1}{2d_2} + 3d_2 a(x) > 0. \quad (4.13)$$

В результаті виникає проблема задоволення трьох нерівностей (4.12), (4.13), дві з яких включають в себе знакозмінну нелінійну функцію $a(x)$, за допомогою єдиного параметра $d_2 = const$.

Враховуючи величину інтервалу

$$a(x) \in \left[-\frac{2}{3\pi}, 1\right] \quad \forall x \in [0, \infty), \quad (4.14)$$

зміни функції $a(x)$ з (4.32), неважко отримати умови, яким повинен підкорятись параметр d_2 , щоб виконувались нерівності (4.12), (4.13). Будемо мати $0 < d_2 < \min(\sqrt{\pi}/2, 1/\sqrt{6})$. Вони задають границі області можливих значень параметра d_2 у вигляді

$$0 < d_2 < 0,4 \quad (4.15)$$

Відмітимо, що величина діапазону (4.15) відповідає прийнятним умовам (4.8) і при заміні їх іншими також зміниться.

Враховуючи вирази (4.9) і (4.13), (4.15), можна отримати для умов (4.8) закон управління

$$c^T = \left[\frac{1}{d_2} \left(\frac{1}{2d_2^2} - a(x) \right), \quad \frac{3}{2d_2^2} - 4a(x), \quad \frac{3}{2d_2} \right], \quad (4.16)$$

що забезпечує стабілізацію замкнутої системи

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{s \ i\pi}{x_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2d_2^3} + \frac{s \ i\pi}{x_1 d_2} & -\frac{3}{2d_2^2} + 4 \frac{s \ i\pi}{x_1} & -\frac{3}{2d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

яка описує асимптотично стійкі рухи математичного маятника біля верхнього (нестійкого) положення рівноваги при структурі інтегрального управління (4.1).

Для матриць D і Q при цьому будуть справедливими вирази

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2d_2 & d_2^2 \\ 2d_2 & 5d_2^2 & 3d_2^3 \\ d_2^2 & 3d_2^3 & 3d_2^4 \end{bmatrix} = c \quad o \quad , \quad (4.18a)$$

$$Q(x) = 2 \begin{bmatrix} d_2^{-1} & 2q_6(x) & d_2 q_6(x) \\ 2q_6(x) & d_2 q_5(x) & 3d_2^2 q_4(x) \\ d_2 q_6(x) & 3d_2^2 q_4(x) & 3d_2^3 \end{bmatrix}, \quad (4.18b)$$

де для зручності прийнято

$$q_4(x) = 1 - 4d_2^2 a(x), \quad q_5(x) = 5 - 24d_2^2 a(x), \quad q_6(x) = 1 - 6d_2^2 a(x), \quad (4.18в)$$

при значеннях d_2 із діапазону (4.15).

4.2. Оптимальна стабілізація математичного маятника

Розв'яжемо задачу оптимальної стабілізації нелінійної системи на прикладі математичного маятника шляхом *адитивного введення* в попередньо застабілізовану систему (4.17) оптимального управління, яке реалізується тими ж каналами, що й стабілізуюче управління. Тоді будемо мати систему

$$\dot{x} = \{A - b[c^T + k^T]\}x, \quad (4.19)$$

в якій побудуємо оптимальне управління

$$u_{opt} = -k^T(x, t)x \quad (4.20)$$

за критерієм узагальненої роботи [81]

$$I(x, u, u_{opt}) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T P(x, t)x + u^T R^{-1}u + x^T D B R B^T D x) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (4.21)$$

аналогічним (3.83), де $Q(x, t)$ визначається формулами (4.18б), (4.18в).

Матриця підсилення K в оптимальному за критерієм узагальненої роботи регуляторі задається рівністю

$$k^T = R b^T D. \quad (4.22)$$

Тут $R = \text{diag}[r_1, r_2, r_3]$ – додатно визначена матриця вагових коефіцієнтів.

Тоді система (4.19) відповідно набуде вигляду

$$\dot{x} = \{A - b[c^T + R b^T D]\}x. \quad (4.23)$$

Підставивши в (4.23) значення матриць A, b, c^T, D з виразів (4.3б), (4.10), (4.16), (4.18а), отримаємо рівняння руху математичного маятника із стабілізуючим і оптимальним управлінням у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1 \\ \frac{\sin x_1}{d_2 x_1} - \frac{1}{2d_2^3} - r_1 d_2^2 & \frac{4 \sin x_1}{x_1} - \frac{3}{2d_2^2} - 3r_2 d_2^3 & -\frac{3}{2d_2} - 3r_3 d_2^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

причому власне оптимальне управління математичного маятника буде визначатися виразом

$$u_{opt} = -d_2^2 [r_1 \quad 3r_2 d_2 \quad 3r_3 d_2^2] x \quad (4.25)$$

при значеннях d_2 з діапазону $0 < d_2 < 0,408$.

Задачу оптимальної стабілізації математичного маятника можна розв'язати, вклавши структуру матриці підсилення стабілізуючого управління c^T з виразу (4.16) в структуру матриці підсилення оптимального управління k^T з рівності (4.22).

4.3. Функціонування САПР оптимального стабілізатора математичного маятника

База даних САПР математичного маятника (див. рис. 1.1) містить диференціальне рівняння коливань математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегральним керуванням в псевдолінійній формі виду (4.2).

Відповідно для стабілізації математичного маятника САПР вибрано шостий метод ПЖС НСС.

САПР заповнює структуру стабілізуючого регулятора (3.108в), використовуючи формули (4.9) і (4.13), (4.15), коли остаточний закон управління набуде вигляду

$$c^T = \left[\frac{1}{d_2} \left(\frac{1}{2d_2^2} - a(x) \right), \quad \frac{3}{2d_2^2} - 4a(x), \quad \frac{3}{2d_2} \right].$$

Блок оптимізації регулятора математичного маятника базується на результатах досліджень, викладених у третьому розділі дисертаційної роботи, коли для оптимальної стабілізації математичного маятника використовується критерій узагальненої роботи О.А. Красовського (4.21).

САПР заповнює структуру оптимального управління (4.20) формулою (4.25).

В результаті структурного, параметричного синтезу та оптимізації стабілізуючого управління математичним маятником, маємо повністю спроектовану систему виду (4.24).

Алгоритм побудови САПР оптимальної стабілізації математичного маятника виконується без розгляду задачі спостереження (рис. 3.1), тому після отримання ТЗ від замовника вибирається математична модель у вигляді (4.2) та метод проектування. Розв'язок задачі стабілізації знаходиться у вигляді (4.17) та розв'язок задачі оптимальної стабілізації за заданим критерієм якості (4.21) знаходиться у вигляді (4.24). Математичне моделювання оптимально застабілізованої системи розглядається в наступному підрозділі.

4.4. Математичне моделювання руху маятника

Промодельюємо рівняння (4.1) з нульовою правою частиною, що описує вільний рух математичного маятника, методом Рунге-Кутта в середовищі MatLab [102] при початкових умовах $x(0)=[0.1,0,0]$, $t \in [0;60]$. Будемо мати рис. 4.2, на якому бачимо очевидну нестійкість системи за відсутності в ній управління.

Математична модель руху маятника (4.17) зі стабілізуючим управлінням (4.16) при початкових умовах $x(0)=[0.1; 0; 0]$, $t \in [0; 10]$ і $d_2 = 0.3$ відповідно має вигляд рис. 4.3, на якому бачимо, що система (4.17) досягає нульове відхилення на позначці 5,2 секунди і далі залишається асимптотично стійкою.

Промодельюємо рівняння руху маятника з оптимальним управлінням без стабілізуючого при тих же початкових умовах і $d_2 = 0.3$,

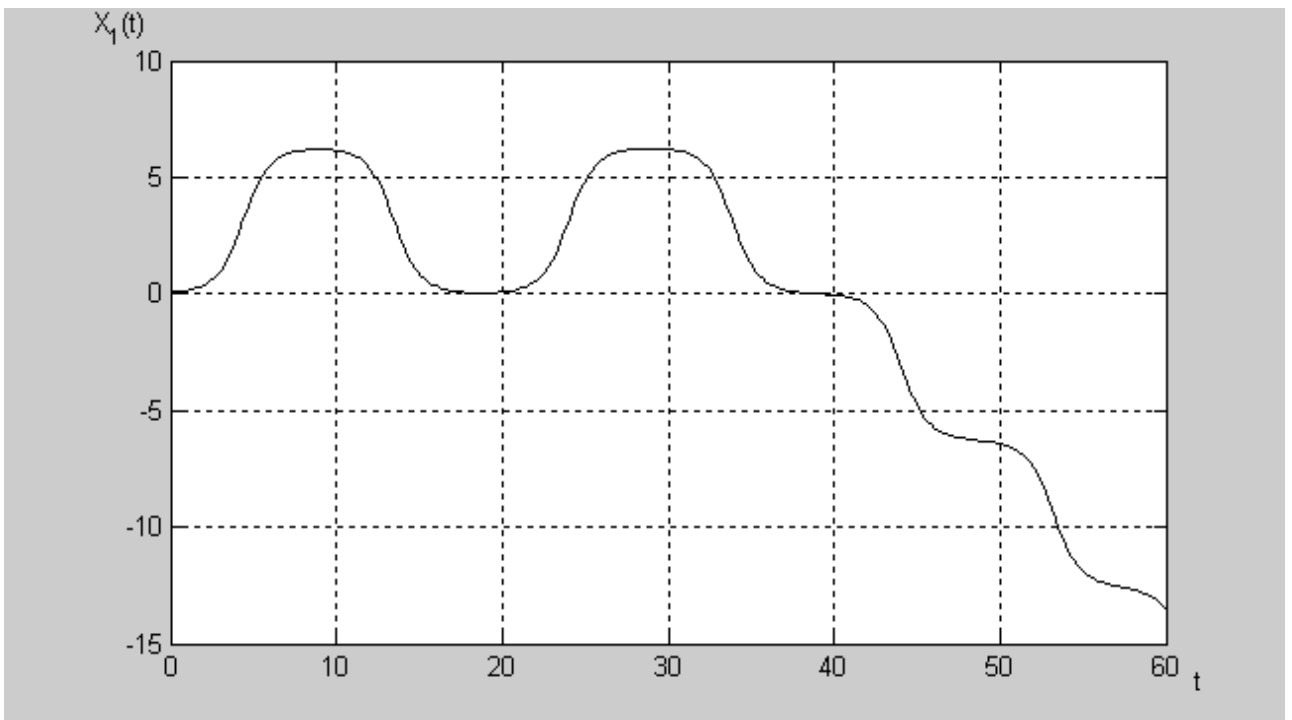


Рис 4.2. Рух математичного маятника без керування при початкових умовах $x(0) = [0.1, 0, 0]$ на інтервалі $t \in [0;60]$.

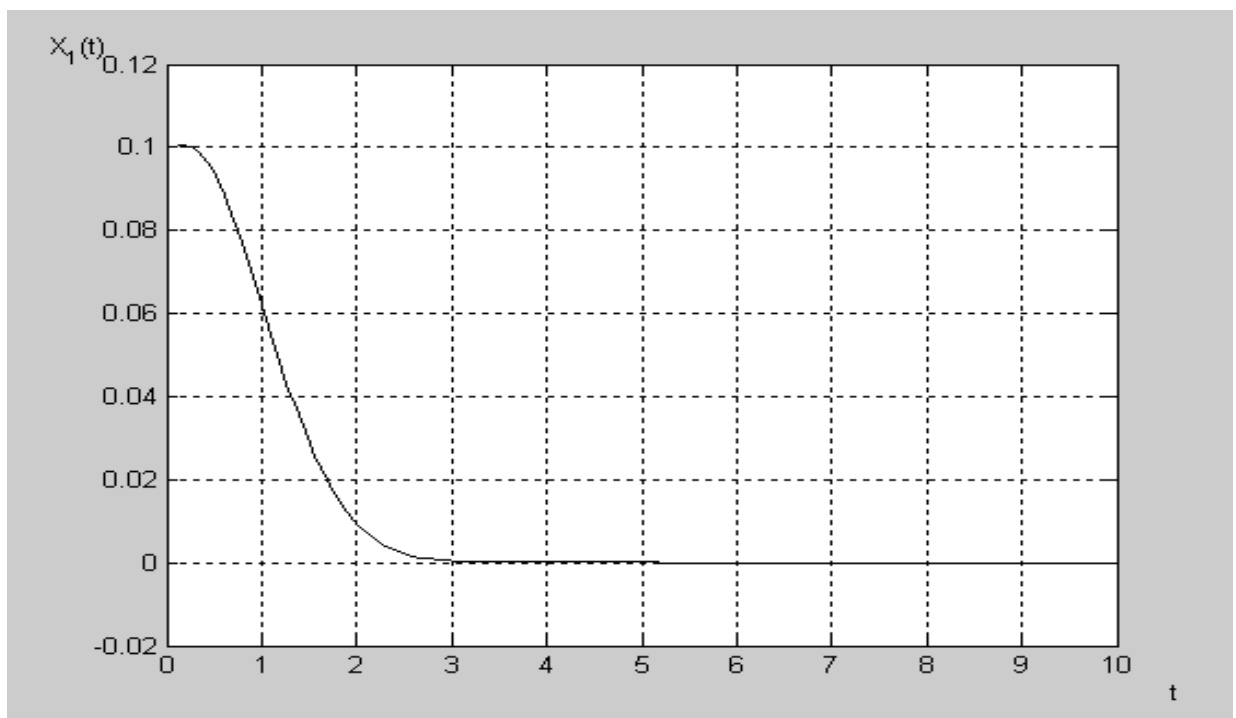


Рис 4.3. Рух математичного маятника зі стабілізуючим управлінням при початкових умовах $x(0) = [0.1; 0; 0]$ на інтервалі $t \in [0; 10]$ і значенні параметра $d_2 = 0.3$.

$r_1 = 0.015, r_2 = 0.16, r_3 = 0.17$, коли в рівнянні (4.23) $c^T = 0$, тобто рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1 \\ -r_1 d_2^2 & -3r_2 d_2^3 & -3r_3 d_2^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Після моделювання його в системі MatLab отримаємо рис 4.4, з якого видно, що оптимальне управління без стабілізуючого призводить до відхилення маятника в протилежному напрямку (явне перерегулювання) і система виявляється нестійкою. Це підтверджує загальний висновок щодо оптимізації систем методом узагальненої роботи О.А. Красовського: його методом можна оптимізувати лише стійкі об'єкти, яким і стає застабілізований маятник згідно з виразом (4.17).

Графічна модель рівняння (4.24) руху маятника із сумарним оптимальним (4.25) та стабілізуючим (4.16) управлінням при початкових умовах $x(0) = [0.1; 0; 0]$, $t \in [0; 10]$ і $d_2 = 0.3$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.3$, $r_3 = 0.5$, представлена на рис. 4.5, який свідчить, що своє нульове положення система, задана формулою (4.24), досягає на позначці 3,2 секунди (тобто на 2 секунди раніше, ніж на рис. 5.3), далі система теж залишається асимптотично стійкою.

Для наочності наведемо спільний графік руху маятника зі стабілізуючим управлінням та із сумарним оптимальним і стабілізуючим управлінням при однакових початкових умовах (на інтервалі $t \in [0; 10]$). Він представлений на рис. 4.6 і на ньому добре видно, що додаткове оптимальне управління попередньо застабілізованим об'єктом покращує якість його стабілізації і приводить його відхилення до нуля швидше за неоптимальне стабілізуюче управління.

4.5. Порівняльний аналіз результатів моделювання руху математичного маятника з результатами М.М. Красовського

Для порівняння результатів нашого дослідження з дослідженнями інших авторів наведемо результати М.М. Красовського побудови ним оптимального стабілізуючого управління математичним маятником.

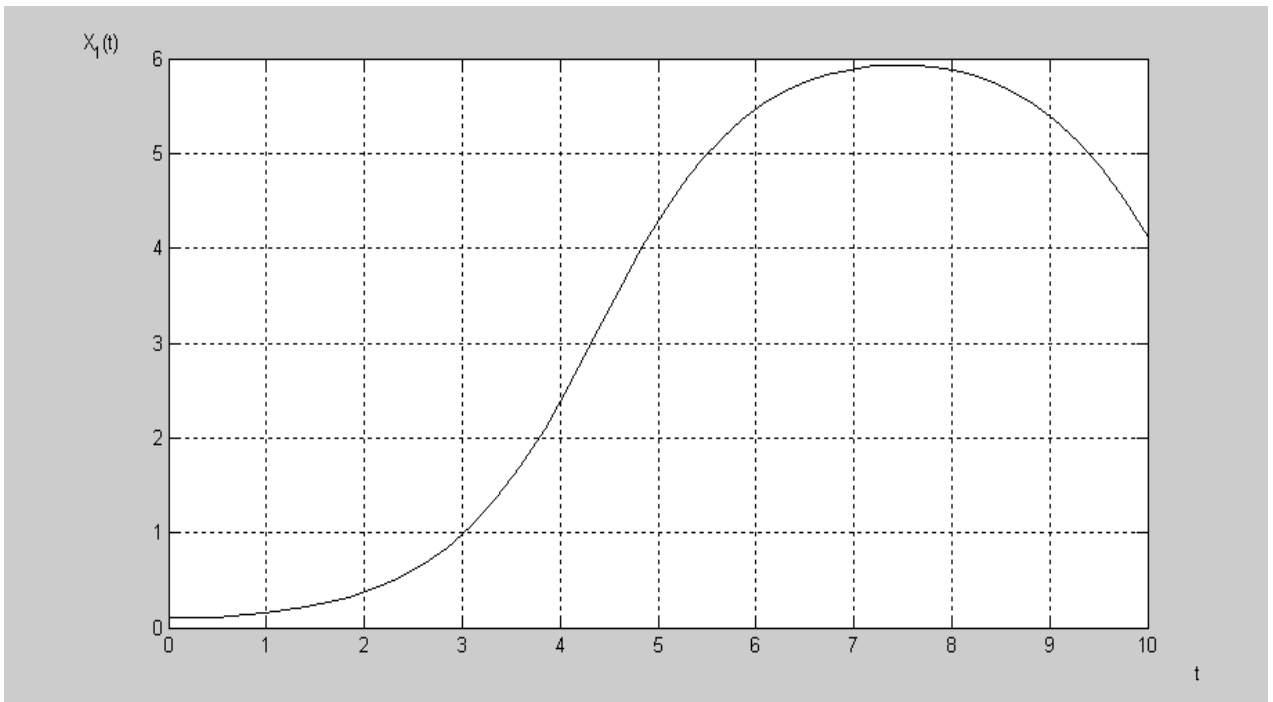


Рис 4.4. Рух математичного маятника з оптимальним управлінням

без стабілізуючого при тих же початкових умовах і $d_2 = 0.3$,
 $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.3$, $r_3 = 0.5$

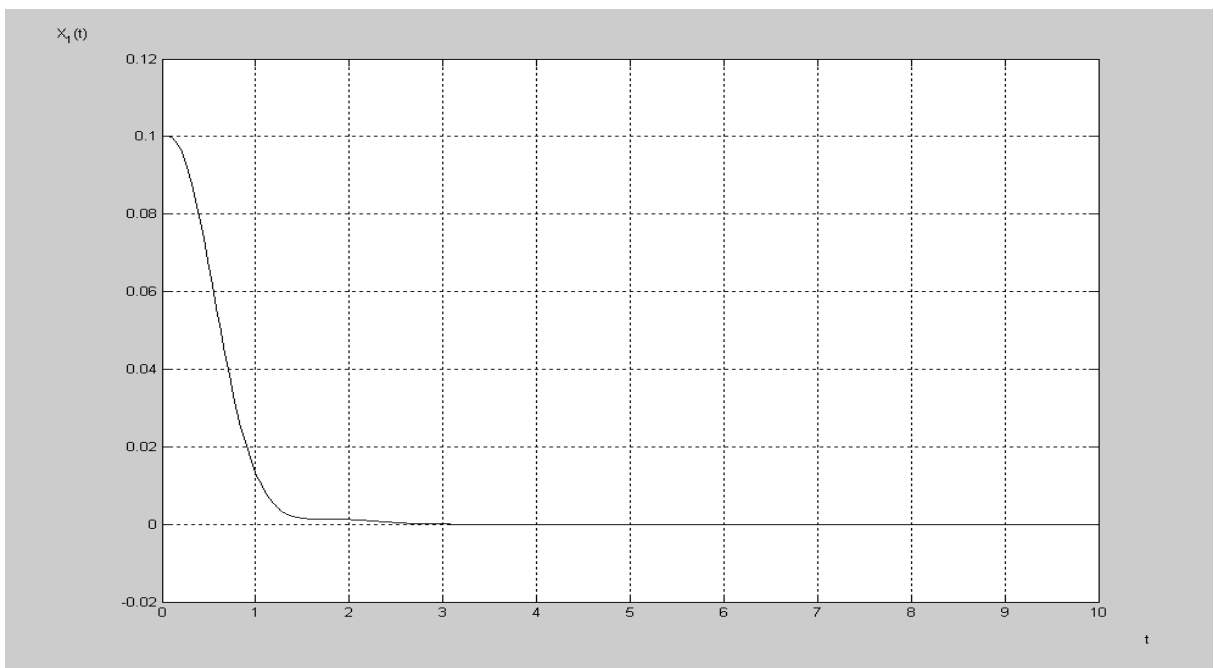


Рис 4.5. Рух математичного маятника із сумарним оптимальним і стабілізуючим управлінням при тих же початкових умовах і значеннях параметрів $d_2 = 0.3$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.3$, $r_3 = 0.5$.

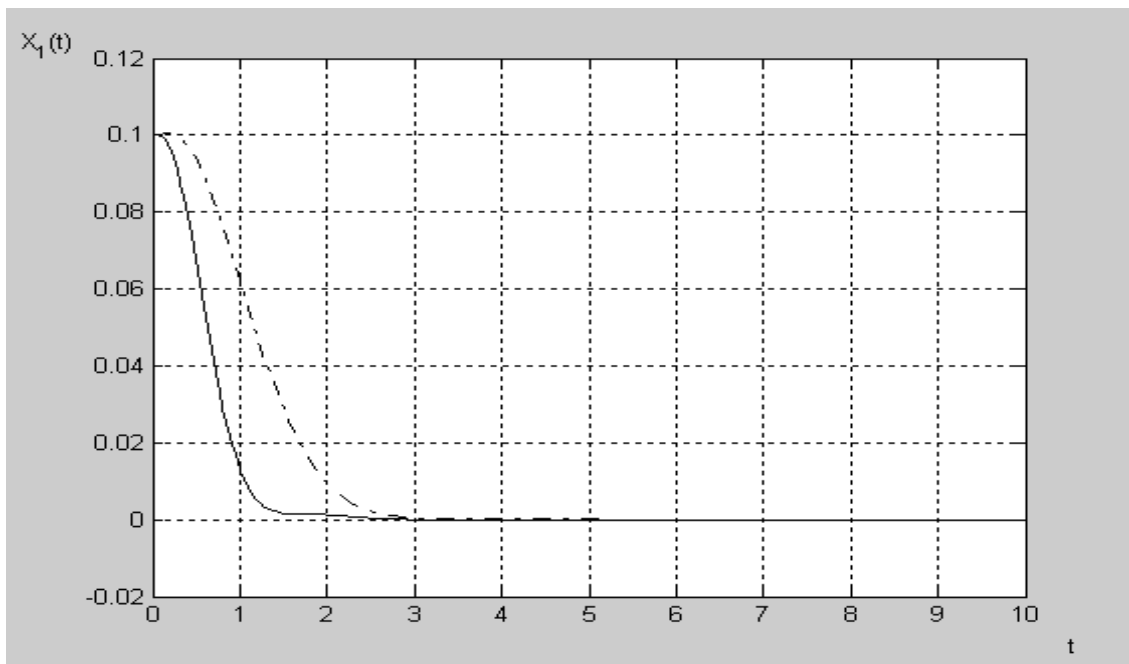


Рис 4.6. Рух математичного маятника зі стабілізуючим управлінням (позначено пунктиром) та із сумарним оптимальним і стабілізуючим управлінням (позначено суцільною лінією) при прийнятих початкових умовах та параметрах оптимізації на інтервалі $t \in [0; 10]$.

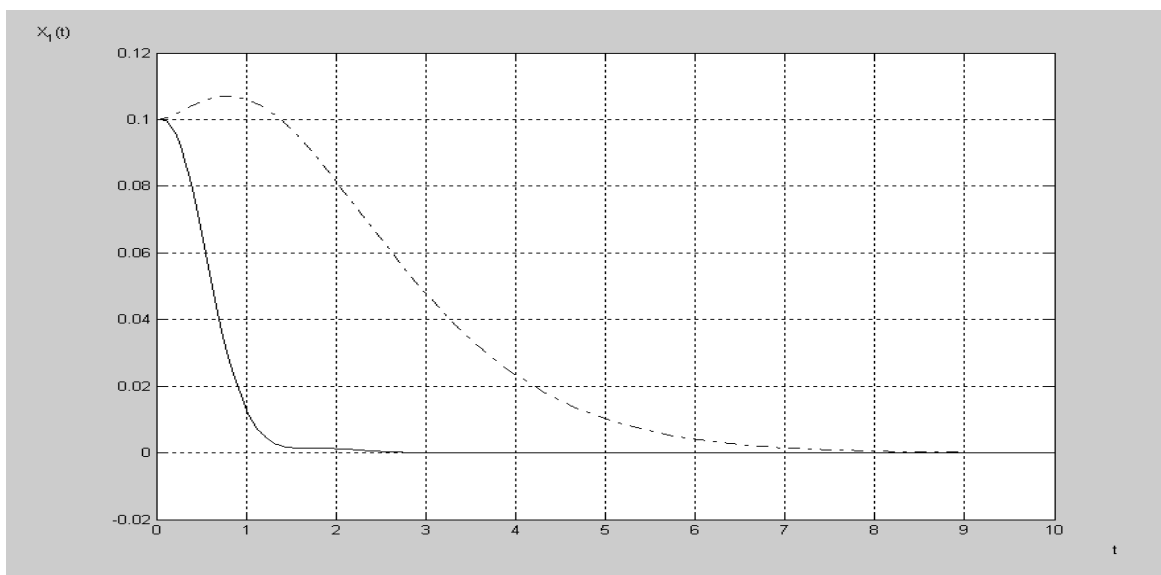


Рис. 4.7. Порівняльний аналіз руху математичного маятника з оптимальним стабілізуючим управлінням, побудованим в роботі (позначено суцільною лінією), та оптимальним управлінням М.М. Красовського (позначено «- . -»).

М.М. Красовським розглянута задача стабілізації математичного маятника [17] у верхньому нестійкому положенні рівноваги моментом, що прикладається до осі підвісу. Цей момент реалізується виконавчим органом, який є інтегруючою ланкою. Виконавчий механізм, в свою чергу, знаходиться під впливом деякого управління u .

Тоді рівняння збуреного руху математичного маятника в позначеннях (4.3) представляються в нормальній формі (4.2).

Рівняння першого наближення були отримані автором [17] у вигляді

$$\dot{x} = (A_k - bu^0)x, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Для цього рівняння була розглянута задача оптимальної стабілізації з таким критерієм якості:

$$I_u = \int_{t_0}^{\infty} [x(t)^T x(t) + u^2(t)] dt.$$

Знайдене М.М. Красовським оптимальне управління u^0 має вигляд

$$u^0 = -(4,6116x_1 + 4,6116x_2 + 3,1974x_3). \quad (4.28)$$

Побудуємо на одному графіку рух математичного маятника, застабілізованого управлінням (4.16), і з додатковим оптимальним стабілізуючим управлінням, знайденим у дисертаційній роботі у вигляді (4.25) (тобто, нелінійну систему (4.24)), та її лінійне наближення (4.27) з оптимальним управлінням М.М. Красовського (4.28) (рис. 4.7).

Як бачимо з рис. 4.7, побудоване в дисертаційній роботі оптимальне стабілізуюче управління покращує якість стабілізації математичного маятника в середньому на 50 % порівняно з оптимальним управлінням М.М. Красовського.

4.6. Стабілізація вихідної напруги в автоматичному регуляторі підсилення (АРП)

Автоматичний регулятор підсилення (нелінійна система) зводиться до композиції неінерційних нелінійних ланок (ННЛ) та інерційних лінійних ланок (ІЛЛ) [103].

Розглянемо структурну схему (рис. 4.8), що відповідає системі АРП із зворотним зв'язком. Вона складається з регульованого підсилювача, коефіцієнт підсилення якого нелінійно залежить від регулюючої напруги $V(t)$ детектора АРП, що формується в залежності від результату вимірювання амплітуди вихідної напруги схемою, складеною з випрямляча і лінійної інтегруючої ланки.

Математична модель АРП описується системою лінійних диференціальних рівнянь, які зв'язують змінні на вході лінійних ланок ІЛЛ-1, ІЛЛ-2 із змінними на їх виході, та двох нелінійних алгебраїчних рівнянь, що пов'язують змінні на виході ННЛ-1 та ННЛ-2 із змінними на їх вході.

На рис. 4.8 позначений ІЛЛ-1 – це типовий коливальний контур, в рівнянні якого

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) \quad (4.29)$$

$a_k = \text{const}, k = \overline{0,2}$, – задані коефіцієнти, *крапкою* позначена операція диференціювання, $f(t)$ – задана функція часу (неперервна або імпульсна чи стохастична);

$$y = xK_0e^{-\lambda V}, \quad (4.30)$$

причому y – вихідна напруга (ННЛ-1), x – вхідна напруга (моделюється коливальним контуром (4.29)).

Розглянемо далі відхилення ξ вихідної напруги y від бажаної y_* , до якої треба стабілізувати вихідну напругу, у вигляді

$$\xi = y - y_* = xK_0e^{-\lambda V} - y_*. \quad (4.31)$$

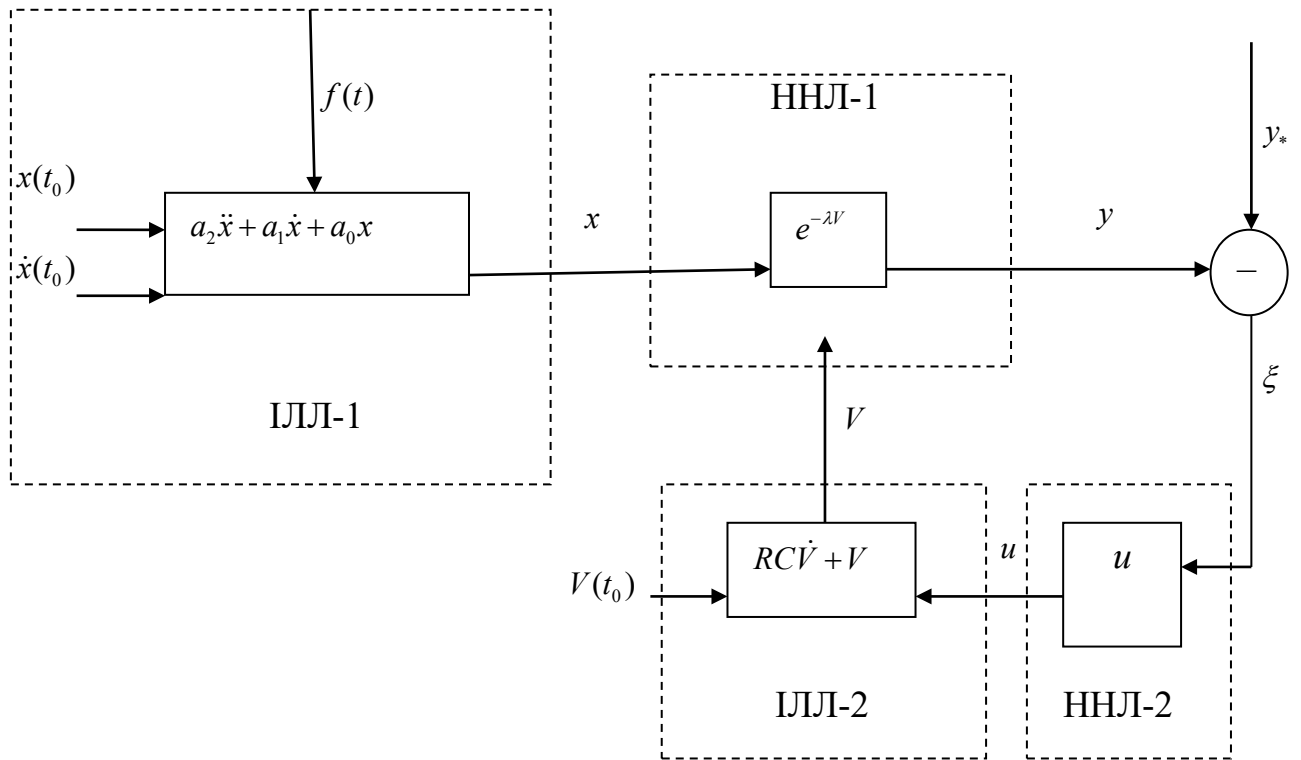


Рис. 4.8. Структурна схема автоматичного регулятора підсилення.

В загальному випадку бажану вихідну напругу можна задавати моделлю [24]

$$y_* = m\varphi, \quad m = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = l\varphi, \quad l = \text{const}. \quad (4.32)$$

За допомогою динамічних процесів (4.32) моделюється широкий клас програмних сигналів. Наприклад, це можуть бути довільні лінійні комбінації скінченних імпульсів, поліноміальних функцій часу, згасаючих і наростаючих синусоїдальних сигналів, згасаючих і наростаючих експонент тощо. Причому коефіцієнти в цих лінійних комбінаціях можуть змінюватись скачками в довільні моменти часу або підкорятися стохастичним законам.

В системі, що розглядається, необхідно вибрати управління $u(t)$ так, щоб вихід об'єкта $y(t)$ точно і безінерційно слідкував за відповідним програмним сигналом $y_*(t)$. Крім того, управління $u(t)$ повинно бути фізично реалізованим у вигляді зворотного зв'язку за входом, тобто $u(t) = u(y(t), y_*(t))$. Розв'язання цієї задачі матиме виключно алгебраїчне підґрунтя.

Запишемо також рівняння коливального RC -контур (ІЛЛ-2) у вигляді

$$RC\dot{V} + V = u_{st} + u_*, \quad (4.33)$$

де R – активний опір (Ом), C – ємність (Ф), $u = u_{st} + u_*$ – шукане керування, яке повинне забезпечувати слідування вихідної напруги за її бажаною величиною, тобто враховуючи (4.31),

$$u_{st} = k \cdot (y - y_*) = k\xi, \quad (4.34)$$

а значення керування u_* буде пояснене далі в процесі розв'язання задачі.

Якщо рівняння (4.29) переписати у вигляді $\ddot{x} = -\frac{a_1}{a_2}\dot{x} - \frac{a_0}{a_2}x + \frac{1}{a_2}f(t)$ і потім представити його у формі Коші, то будемо мати при $x = x_1$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{a_0}{a_2}x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2 + \frac{1}{a_2}f(t). \quad (4.35)$$

Щоб синтезувати управління (4.34), яке повинно забезпечувати $y \rightarrow y_*$, $\xi \rightarrow 0$, треба записати рівняння приладу у відхиленнях ξ . Для цього продиференціюємо рівність (4.31) і врахуємо рівняння (4.32), (4.33), (4.35) та вираз (4.30). В результаті отримаємо рівняння

$$\dot{\xi} = \dot{y} - \dot{y}_* = \dot{x}_1 K_0 e^{-\lambda V} - \lambda K_0 e^{-\lambda V} x_1 \dot{V} - m\dot{\varphi},$$

з якого після нескладних перетворень остаточно будемо мати

$$\dot{\xi} = \frac{\lambda K_0}{RC} [V - (m\varphi + \xi)k] \xi - \frac{\lambda K_0}{RC} (\xi + m\varphi) u_* + x_2 K_0 e^{-\lambda V} + \frac{\lambda K_0}{RC} V - ml\dot{\varphi}. \quad (4.36)$$

В рівнянні (4.36) треба вибрати управління u_* так, щоб задовольнити умову

$$K_0 e^{-\lambda V} x_2 + \frac{\lambda K_0}{RC} V - ml\dot{\varphi} - \frac{\lambda K_0}{RC} (\xi + m\varphi) u_* = 0, \quad (4.37)$$

звідки, враховуючи (4.31), (4.32), матимемо

$$u_* = \frac{(\lambda K_0 - RC l) y_* + K_0 RC x_2 e^{-\lambda V}}{\lambda K_0 y}, \quad (4.38)$$

а потім в рівнянні

$$\dot{\xi} = \frac{\lambda K_0}{RC} [V - (m\varphi + \xi)k] \xi, \quad (4.39)$$

яке отримується з (4.36) при урахуванні (4.37), (4.38), треба синтезувати стабілізуюче управління $u_{st} = k\xi$, знайшовши параметр керування k .

Застосуємо до (4.39) другий метод Ляпунова. Оскільки рівняння (4.39) скалярне, то виберемо згідно з шостим алгоритмом ПЖС НСС функції Ляпунова $v = \frac{1}{2} \xi^2$, $w = q^2 \xi^2$. Тоді з умови (2.21) $\dot{v} = -w$ на траєкторіях системи, яка описується рівнянням (4.39), будемо мати

$$\dot{v} = \xi \dot{\xi} = \xi^2 \frac{\lambda K_0}{RC} [V - (m\varphi + \xi)k] = -q_0^2 \xi^2,$$

звідки

$$k = \frac{RCq_0^2 + \lambda K_0 V}{\lambda K_0 y}. \quad (4.40)$$

На закінчення в рівнянні (4.33), враховуючи знайдене керування

$$u = k(y - y_*) + u_* \quad (4.41)$$

з відповідними виразами (4.40) і (4.38), остаточно отримаємо

$$RC\dot{V} + V = \frac{RCq_0^2 + \lambda K_0 V}{\lambda K_0 y} (y - y_*) + \frac{(\lambda K_0 - RC)y_* + K_0 RCe^{-\lambda V} x_2}{\lambda K_0 y}. \quad (4.42)$$

У правій частині рівняння (4.42) параметри R, C, K_0, λ відомі (якщо в системі (4.32) явно задається y_* і рівняння $\dot{\varphi} = l\varphi$ відсутнє, то в (4.42) треба покласти $l = 0$), певним чином задається бажане значення вихідної напруги y_* , вихідна напруга y вимірюється, тоді необхідно лише до (4.42) приєднати також систему (4.35), щоб мати поточне значення змінної x_2 . В результаті повна система рівнянь, що описують поведінку АРП, в якому вихідна напруга y стабілізується за допомогою управління u до значення y_* , буде складатися з рівнянь (4.42) і (4.35) [174, 175].

Промодельюємо рівняння (4.42) АРП зі зворотним зв'язком та вихідним сигналом (4.30) методом Рунге-Кутта в середовищі MatLab (для спрощення моделі вхідний сигнал задамо рівнянням $x = A \sin(\omega t) + 1,5$, при $A = 1$, $\omega = 0,6$) за початкових умов $V(0) = 0$, $t \in [0, 01; 50]$ і значеннях коефіцієнтів $RC = 100$, $K_0 = 1$, $\lambda = 0,001$, $q_0 = 10$. Бажану вихідну напругу приймемо $y_* = 2$. Результат моделювання представлено на рис. 4.9 та на рис. 4.10 за тих же початкових умов і значеннях коефіцієнтів на інтервалі $t \in [0, 01; 3,5]$.

З рис. 4.9, 4.10 бачимо, що запропонована математична модель АРП, яка описується рівняннями (4.35), (4.42) з управлінням (4.41) має постійне значення

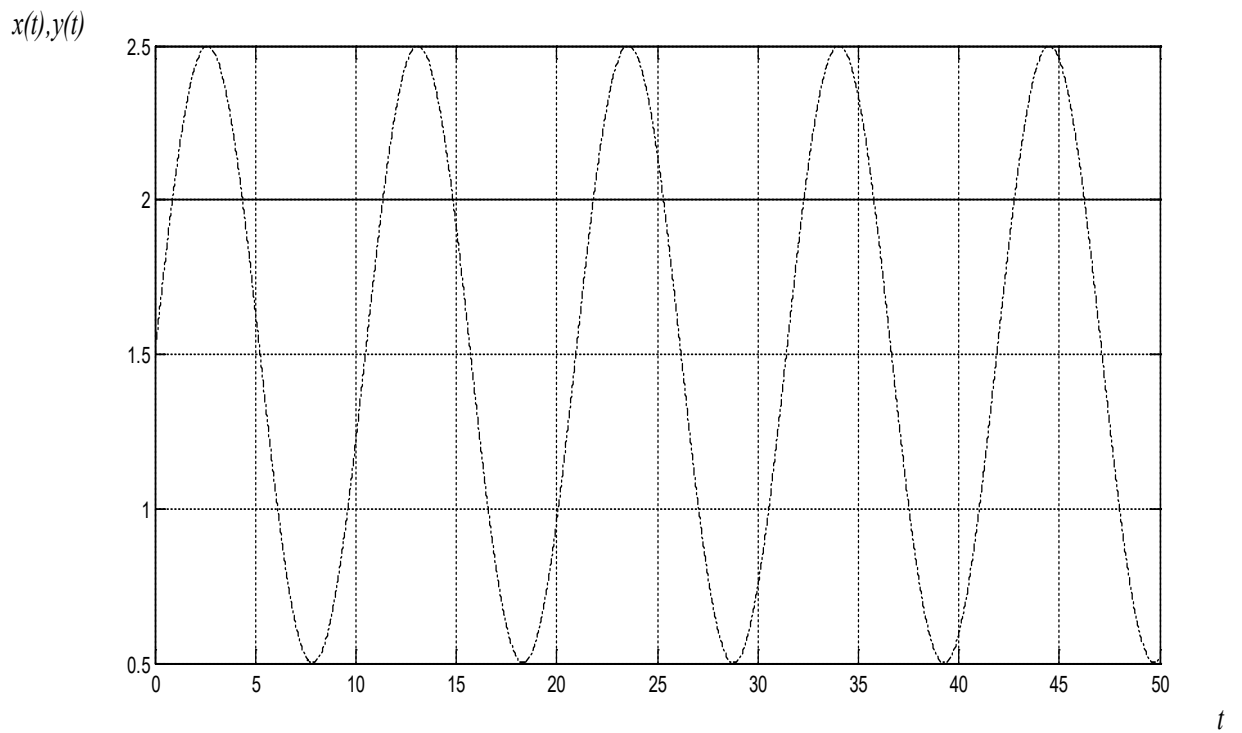


Рис. 4.9. Вхідний сигнал АРП (позначено пунктирною лінією) та вихідний сигнал АРП (позначено суцільною лінією).

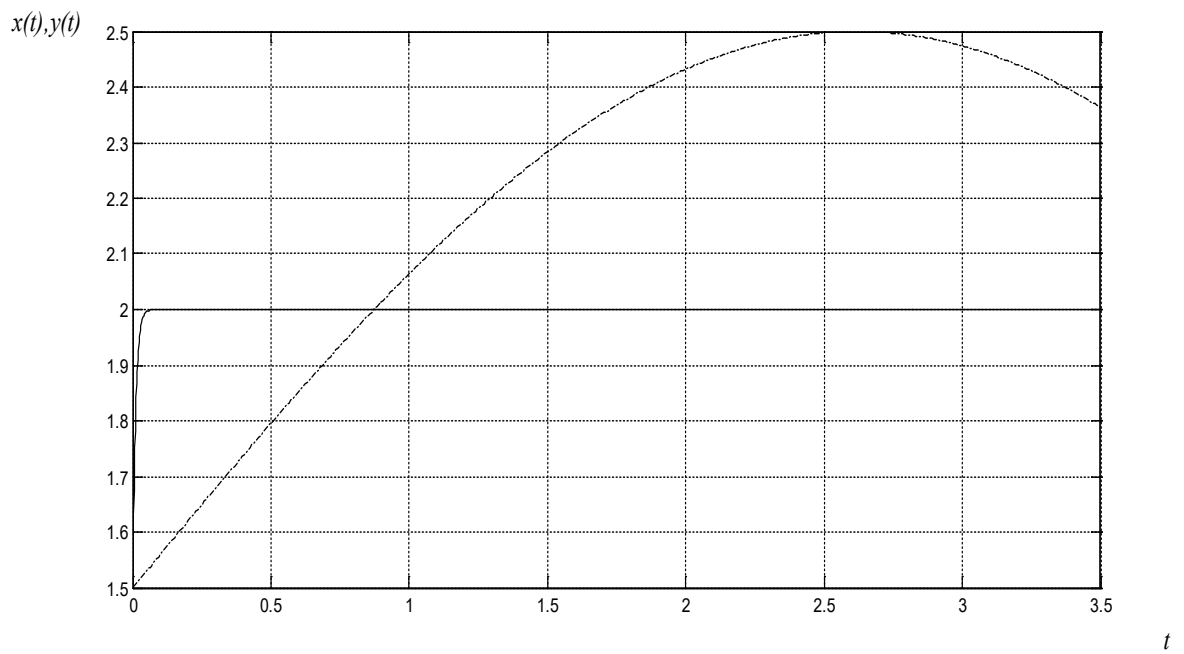


Рис. 4.10. Вхідний сигнал АРП (позначено пунктирною лінією) та вихідний сигнал АРП (позначено суцільною лінією) на

інтервалі

$t \in [0, 01; 3, 5]$.

вихідної напруги, яке дорівнює заданому значенню $y_* = 2$ незалежно від величини коливань на вході системи.

Основні результати розділу опубліковані автором в роботах [9, 10, 105, 174, 175].

4.7. Висновки до розділу 4

1. В цьому розділі запропонована та розроблена САПР розв'язання задачі стабілізації математичного маятника.
2. Побудовано оптимальне управління математичним маятником за критерієм узагальненої роботи (4.21).
3. Проведені дослідження показали, що без попередньої стабілізації оптимальне управління за критерієм О.А. Красовського не забезпечує стійкість руху математичного маятника (рис. 4.4).
4. Моделювання руху математичного маятника обумовило такі висновки:
 - Застосування запропонованого оптимального управління (4.25) сприяє підвищенню точності попередньої стабілізації математичного маятника і мінімізує квадратичний критерій якості О.А. Красовського.
 - Синтезоване оптимальне управління попередньо стабілізованим математичним маятником забезпечує стабілізацію системи вже на третій секунді (що видно з рис. 4.6), тоді як неоптимальне стабілізуюче управління забезпечує нульове значення відхилень у системі лише на п'ятій секунді.
 - Оптимальне управління покращує якість попередньої стабілізації математичного маятника в середньому на 25%.
 - Порівняно з оптимальним управлінням М.М. Красовського побудоване в дисертаційній роботі оптимальне стабілізуюче управління покращує якість стабілізації математичного маятника в середньому на 50 %.
5. Проаналізована математична модель автоматичного регулятора підсилення (АРП).

6. Шостим методом ПЖС НСС синтезовано стабілізуюче управління (4.41) цією системою.
7. Результати моделювання в середовищі MatLab системи рівнянь (4.42), (4.30), що описують поведінку АРП, доводять високу ефективність запропонованого синтезу закону керування (рис. 4.9), який дозволяє стабілізувати значення вихідної напруги на заданій величині.

Результати даного розділу впроваджені в учбовому процесі НАУ в курсах: «Основи комп'ютерного проектування РЕА», «Математичне моделювання систем та процесів» для студентів напряму 6.050901 «Радіотехніка» спеціальності 8.05090103 «Радіоелектронні пристрої системи та комплекси» (Додаток 2) та використані в публікаціях у наукових журналах.

Список публікацій здобувача:

1. Малоед М.Н. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Проблемы аналитической механики / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т.7, №3. – С. 330 – 344.
2. Малоед М.Н. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем положении равновесия / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Тезисы международной конференции “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” / 25 – 27 мая, 2011 г. – К.: КНУ. – 2011. – С. 375.
3. Малоед М.М. Оптимізація стабілізуючого управління математичним маятником / М.М. Малоед // Електроніка та системи управління. – К.: НАУ – 2011. – №1(27). – С. 78 – 83.
4. Малоед М.М. Моделювання автоматичного регулятора підсилення / М.М. Малоед // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 28-29 листопада 2012 р., м. Київ. . – К.: НАУ, 2012. – С. 57.
5. Малоед М.Н. Математическое моделирование автоматического регулятора усиления с обратной связью / М.Н. Малоед, И.Г. Прокопенко // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної

системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху
CNS/ATM», 28-30 листопада 2012 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2012. – С. 77.

РОЗДІЛ 5

АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ РУХУ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

5.1. Штучні супутники Землі та області їх застосування

Штучні супутники Землі (ШСЗ) — це космічні апарати (КА), що виведені на навколоземні орбіти і призначені для розв'язування науково-дослідних і прикладних задач [86]. Перший ШСЗ створено в СРСР і запущено 04.10.1957 р.; в США перший ШСЗ запущено 01.02.1958 р.

Відповідно до міжнародної домовленості космічний літальний апарат називається *штучним супутником Землі*, якщо він здійснив не менше одного оберту навколо нашої планети. ШСЗ (вагою від 0,7 кг до десятків тонн) виводяться на навколоземні орбіти за допомогою керованих багатоступінчастих ракет-носіїв. Для цього ШСЗ необхідно надати швидкість, не меншу за першу космічну, але й не більшу за другу. Контроль за їхнім рухом здійснюється шляхом спостережень зі спеціальних наземних станцій (зокрема, зі станції спостереження за ШСЗ при Ужгородському університеті).

Все більшого поширення набувають системи супутникового зв'язку (ССЗ) з геостаціонарними ШСЗ, що часто називаються СШСЗ (стаціонарні ШСЗ). Вони застосовуються для телефонно-телеграфного зв'язку, радіо і телемовлення. Створюються геостаціонарні космічні апарати комплексного типу для метеорологічних цілей, вивчення природних ресурсів Землі, контролю місця знаходження рухомих об'єктів різного призначення (застосування навігаторів), виконання інших завдань [87].

Найважливіша перевага геостаціонарних ШСЗ – це реалізація величезної постійної зони прямої видимості численних пунктів на Землі, охоплення великих територій, можливість організації зв'язку на велику відстань між значним числом абонентів.

Істотна перевага супутникових систем зв'язку зі супутниками на геостаціонарних орбітах (порівняно із супутниками на інших орбітах, наприклад, високо чи низько-еліптичних) полягає в тому, що при їх використанні знижуються вимоги до наземних систем стеження і зв'язку, при цьому спрощуються або виявляються зовсім непотрібними пристрої наведення бортових антен. За допомогою трьох таких супутників, розташованих один відносно одного під кутами 120° , можна створити глобальну систему зв'язку, яка охоплює практично всю поверхню Землі (рис. 5.1).

Говорячи про недоліки СШСЗ, не можна нехтувати тим, що виведення апарата на стаціонарну орбіту здійснюється складніше, ніж на низько чи на високо-еліптичну. Обходиться дорожче і доставка корисного вантажу на геостаціонарну орбіту, ніж навіть на низько-еліптичну. Для утримання СШСЗ в заданій точці «стояння» на потрібній довготі необхідне регулярне коригування його орбіти за допомогою мікродвигунів, для чого на борту супутника необхідні суттєві запаси палива. Ускладнюється також його управління в польоті. Проте, розвиток космонавтики дозволяє розраховувати на швидке й успішне подолання всіх ускладнень, що виникають при створенні та експлуатації супутникових систем зв'язку на геостаціонарних орбітах, зокрема, шляхом *автоматизованого проектування* таких систем.

В дисертаційній роботі розглядається супутник «Січ-2» (рис. 5.2) – малогабаритний космічний апарат. Розроблений в КБ «Південне» в 2009 році на сучасному світовому рівні у негерметичному виконанні з широким використанням полімерних та композиційних матеріалів. Запущений 17 серпня 2011р. з ракети-носія «Дніпро» на пусковій базі «Ясний» (Росія, Оренбурзька область) за безпосередньої участі українських спеціалістів.

На жаль, згідно з повідомленням Державного космічного агентства (ДКА) України 12 грудня 2012 року зв'язок з космічним апаратом «Січ-2» обірвався. Комісія, створена з цього приводу встановила *"неможливість подальшого використання КА «Січ-2» у зв'язку з остаточною втратою енергопостачання"*.

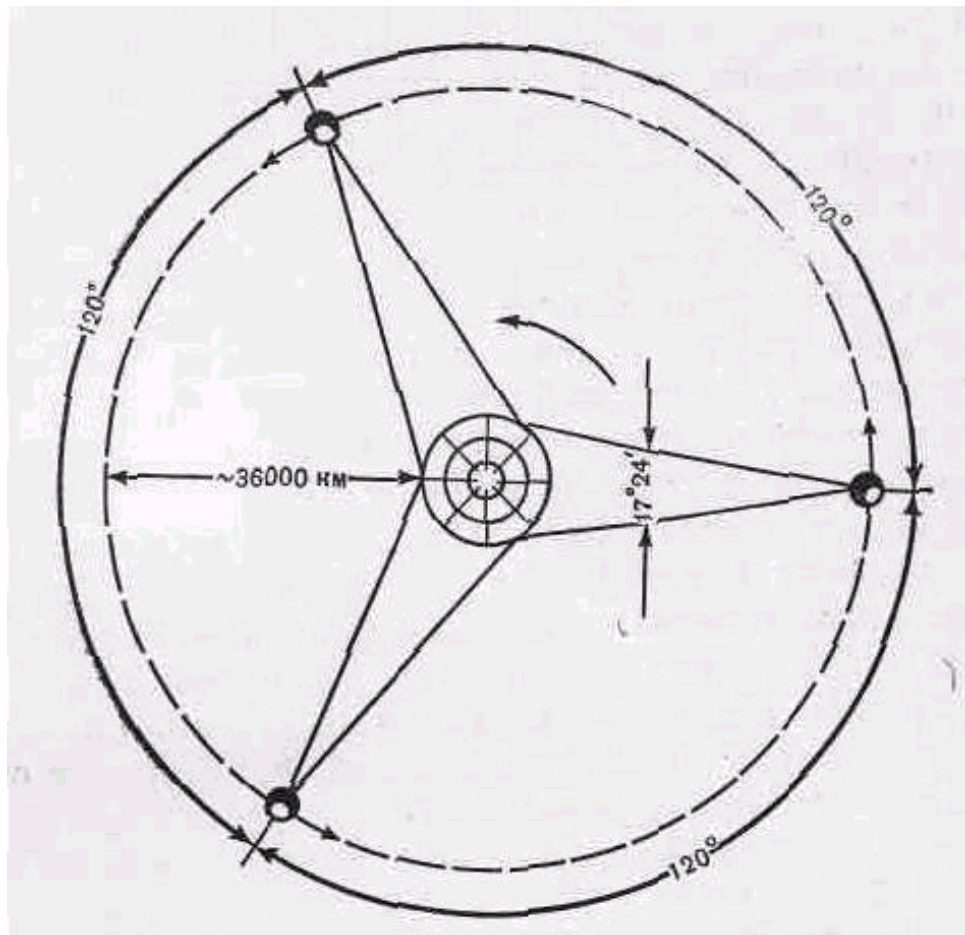


Рис. 5.1. Три рівновіддалені ГСЗ на геостационарній орбіті.



Рис 5.2. Штучний супутник Землі «Січ-2» на фоні Землі.

В комплект наукового обладнання ШСЗ типу «Січ», зокрема, входили багатозональний скануючий пристрій і сканер середнього інфрачервоного діапазону для отримання цифрових оптико-електронних знімків поверхні Землі в панхроматичному і багатоспектральному діапазонах, а також у середньому інфрачервоному діапазоні.

Крім того до складу корисного навантаження супутника «Січ» відносився комплекс наукової апаратури «Потенціал», зокрема, із ферозондовий магнітометр LEMI-016M.

Також на КА були містити службові бортові системи: електроживлення, забезпечення температурного режиму КА, зв'язку, управління орієнтацією в просторі, з датчиками магнітовимірювальної системи, комбінованими датчиками орієнтації, ДКШ, з апаратурою GPRS та маховиками.

Параметри системи орієнтації КА:

- точність визначення орієнтації – 0,02 град.;
- точність орієнтації – 0,6 град.;
- кутова швидкість стабілізації – 0,005 град/с.;
- максимальний кут відхилення від надиру – ± 35 град.

Технічні характеристики супутника «Січ-2»:

- маса супутника – 176 кг.
- висота польоту – 668 км.
- розподільча здатність на місцевості: панхроматичні знімки – 7,8 м., багатоспектральні знімки – 7,8 м., інфрачервоні знімки – 46 м.
- смуга захоплення місцевості : панхроматичні знімки – 46,6 м., багатоспектральні знімки – 46,6 м., інфрачервоні знімки – 55,5 м.
- термін активного існування – не менше 5 років.

За умови подальшого просування геопросторових технологій, системи, подібні до «Січ-2» та його наступної моделі - «Січ-2М», можуть успішно використовуватись для потреб муніципального управління та розвитку територій, пошуку корисних копалин, виконання заходів екологічного моніторингу, вирішення завдань національної безпеки.

5.2. Порівняльний аналіз методів і пристроїв для стабілізації супутника

Як відомо, задану траєкторію при русі орбітального тіла зберігає тільки його центр мас, а сам супутник під дією різних збурюючих моментів може обертатися навколо свого центра мас. Для нерухомості корпусу ШСЗ відносно його центра мас необхідно супутник стабілізувати в потрібному положенні. Та управління ШСЗ – це не лише стабілізація його відносно центра мас, але й орієнтація відносно деякої базової системи координат, не зв'язаної із ШСЗ. Вибір орієнтації ШСЗ залежить від призначення супутника.

Якщо надання супутнику необхідного просторового положення може бути здійснене порівняно просто, то задача забезпечення його стійкості в заданому положенні виявляється складнішою, адже для зміни орієнтації ШСЗ досить короткочасно прикласти до нього відповідний обертальний момент. Збереженню ж отриманої орієнтації перешкоджатимуть різного роду регулярні й нерегулярні збурення, компенсація яких і складає завдання стабілізації.

Очевидно, що маючи надійну систему стабілізації, неважко буде з її допомогою здійснювати й управління орієнтацією ШСЗ.

Система стабілізації ШСЗ повинна працювати безперервно, бути дуже чутливою до збурюючих моментів, які можуть мати найрізноманітніше походження, величину та тривалість дії.

Зовнішні збурення природного походження – аеродинамічного, гравітаційного або магнітного – характеризуються, з одного боку, дуже малими значеннями моментів, з іншого – досить великою тривалістю дії. Наприклад, гравітаційне поле Землі діятиме на ШЗС практично безперервно, хоча збурюючий момент, що виникає при цьому, буде мати величину, близьку до 0,05 кг·м [88]. Але якщо цей момент постійно не компенсувати, то його імпульс стане дуже значним, а кутові швидкості обертання супутника почнуть зростати необмежено.

Зважаючи на *пасивні методи стабілізації*, найпростіше було б забезпечити стійке положення ШЗС, надавши йому постійного обертального руху навколо однієї з осей. Такий спосіб стабілізації вимагає цілком певної

конфігурації ШЗС – момент інерції супутника навколо його осі обертання має бути або набагато більшим, або набагато меншим за моменти інерції відносно двох його інших осей. Цій умові відповідають супутники, що мають форму диска, тороїда або хреста, що обертаються в своїй площині, або супутники, що мають форму циліндра і обертаються навколо своєї подовжньої осі.

Обертання ШЗС, що має в плані форму диска чи обода, окрім цілей стабілізації, може служити й для створення на ньому штучної гравітації і в цьому сенсі представляється дуже вдалим вирішенням проблеми. Цей спосіб, проте, важко поєднати з проведенням з борту ШЗС великого числа геофізичних і астрономічних вимірів. Неприпустимість при виконанні таких вимірів обертання всього супутника в цілому примушує знаходити інші методи його стабілізації.

Аналіз впливу гравітаційного поля на супутники Землі показує, що положення ШЗС буде стійким, якщо вісь максимального моменту інерції направити по вертикалі до поверхні Землі, а вісь мінімального моменту розташувати перпендикулярно до площини орбіти супутника. Цікаво, що космічна станція, виконана за формою у вигляді гантелі (має розподіл мас, характерний для гравітаційного диполя), буде самостабілізуватись у полі дії сили тяжіння Землі. На орбіті така станція завжди прагнучиме зайняти положення, при якому подовжня вісь «гантелі» (диполя) буде спрямована до центру Землі, а поперечна – перпендикулярно до площини орбіти. Правда, при такому способі стабілізації процес її йтиме дуже повільно. Крім того, обертання станції навколо подовжньої осі «гантелі», звичайно, контролюватися не буде. Для компенсації обертів навколо цієї осі, тобто для забезпечення повної тривісної стабілізації, необхідні додаткові пристрої.

Новою тенденцією в створенні систем гравітаційної стабілізації є використання як стабілізатора замість жорсткої гравітаційної штанги гнучких протяжних елементів: тросів, стрічок. Уведення таких елементів дозволяє знизити вартість системи стабілізації та зменшити масу космічного апарата (КА), що особливо важливо для малих КА. Такі системи розробляються для ряду перспективних мікро- і наносупутників.

Проте існуючі системи гравітаційної стабілізації з використанням троса мають і ряд недоліків. В першу чергу вони пов'язані з гнучкістю нитки і неможливістю передачі через неї моментів (зокрема, демпфуючих) сил.

Можливості стабілізації ШСЗ з використанням магнітного поля, при якому роль диполя повинна відігравати котушка з електрообмоткою, обмежені ще меншими значеннями відновлюючих моментів. До того ж, такий спосіб стабілізації може застосовуватись для порівняно вузького класу орбіт, визначеного формою земного магнітного поля.

Як компенсуючий чинник у пасивних стабілізуючих системах можна використати аеродинамічний опір конструкції ШСЗ. Для забезпечення стійкості центр прикладання результуючої сили тиску повинен лежати позаду центра мас супутника (якщо дивитись вдовж напрямку руху), причому величина відновлюючого ефекту буде тим більша, чим більші площа лобової поверхні ШСЗ і відстань між центром мас і центром тиску. Природно, що аеродинамічна стабілізація застосовується лише до певних висот орбіти. Граничною висотою вважають 500 км [88], на якій тиск повітря менший за $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ г/см}^2$.

Можливості стабілізації ШСЗ за допомогою світлового тиску, звичайно, ще менші, оскільки тиск сонячного випромінювання поблизу Землі дуже незначний. Розрахунки показують, що для компенсації невеликого збурення за рахунок світлового тиску знадобиться не менше півгодини. Проте вважається, що такий спосіб може знайти застосування для компенсації моментів від деталей устаткування і приладів, що обертаються в процесі роботи.

Практично способи стабілізації за допомогою пасивних методів, можливо, будуть використані при створенні допоміжних пристроїв, що доповнюють роботу інших, ефективніших стабілізуючих систем ШСЗ.

Такі системи використовують лише *активні методи стабілізації*, в яких оновлюючий момент створюється за рахунок енергії, що отримується ззовні або задалегідь запасена на борту ШСЗ. До таких методів відноситься стабілізація за допомогою маховиків, що обертаються, гіродинів і стабілізація реактивними соплами мікродвигунів.

В системі стабілізації маховиками, запропонованою для космічних апаратів ще К.Е. Ціолковським, використовується інерційна властивість тіла, що обертається, зберігати незмінною свою орієнтацію в просторі (гіроскопічний ефект). Відомо, що чим вища кутова швидкість обертання тіла і чим більший його момент інерції, тим стійкіше положення цього тіла в просторі. Таким чином, в цій системі оновлюючим чинником служить момент обертання маховика. Розкручування й підтримка заданої швидкості його обертання повинні створюватись електромоторами невеликої потужності, що живляться від бортової системи енергопостачання. Три такі маховики з осями, розташованими у взаємно-перпендикулярних напрямках, забезпечують повну тривісну стабілізацію супутника за тангажем, рисканням і креном (детальніше така система стабілізації розглянута в наступному підрозділі).

Іншу можливість управління орієнтацією забезпечують силові гіроскопи – гіродини. Їх робота ґрунтується на законі збереження моменту імпульсу.

Якщо під впливом зовнішніх чинників супутник почав повертатись в певному напрямку, досить «підкрутити» маховик гіродина в ту ж сторону, і він «прийме обертання на себе», а небажаний поворот супутника припиниться.

За допомогою гіродинів (рис. 5.3) можна не лише стабілізувати супутник, але й змінювати його орієнтацію, причому іноді навіть точніше, ніж за допомогою ракетних двигунів. Але щоб гіродини були ефективні, вони повинні мати великий момент інерції, що вимагає значної маси та розмірів.

Для стабілізації апарату досить трьох гіродинів (чи маховиків) із взаємно перпендикулярними осями. Але зазвичай їх встановлюють більше для підвищення надійності роботи системи стабілізації.

Для повної стабілізації ШСЗ за тангажем, рисканням і креном необхідно мати принаймні шість пар реактивних двигунів, розташованих на ньому так, як показано на рис. 5.4. При появі збурення включається певна пара двигунів, що створює момент, який компенсує це збурення. Наприклад, якщо супутник починає повертатися навколо осі x в напрямку, вказаному стрілкою, то включиться пара двигунів 1–1. При дії моменту в протилежному напрямі

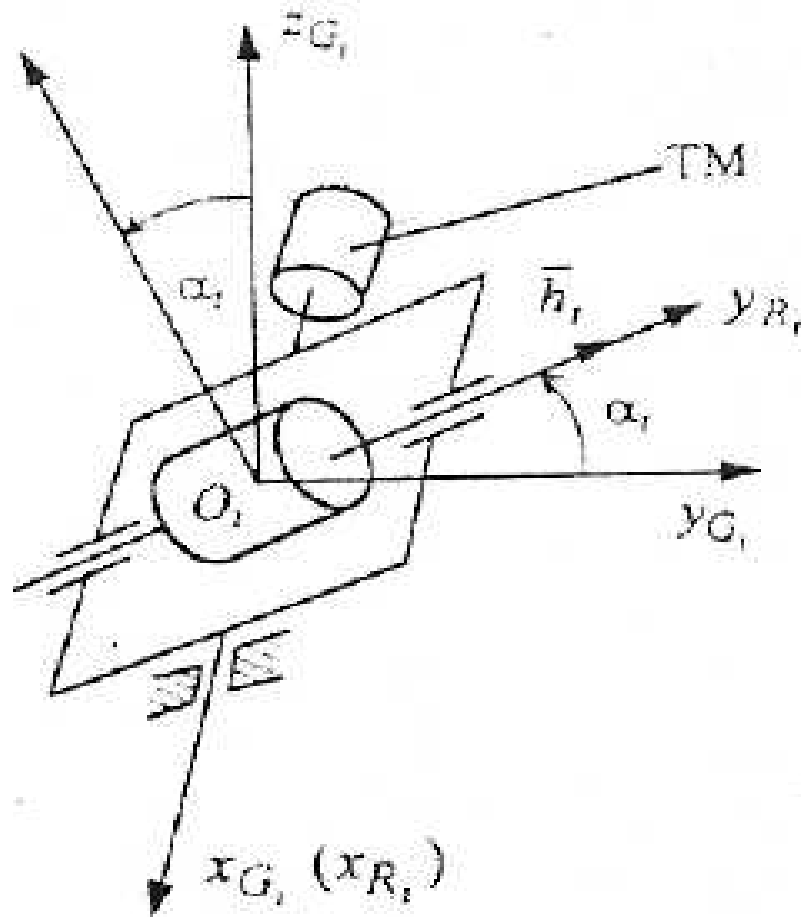


Рис. 5.3. Схема стабілізації ШСЗ гіродинами.

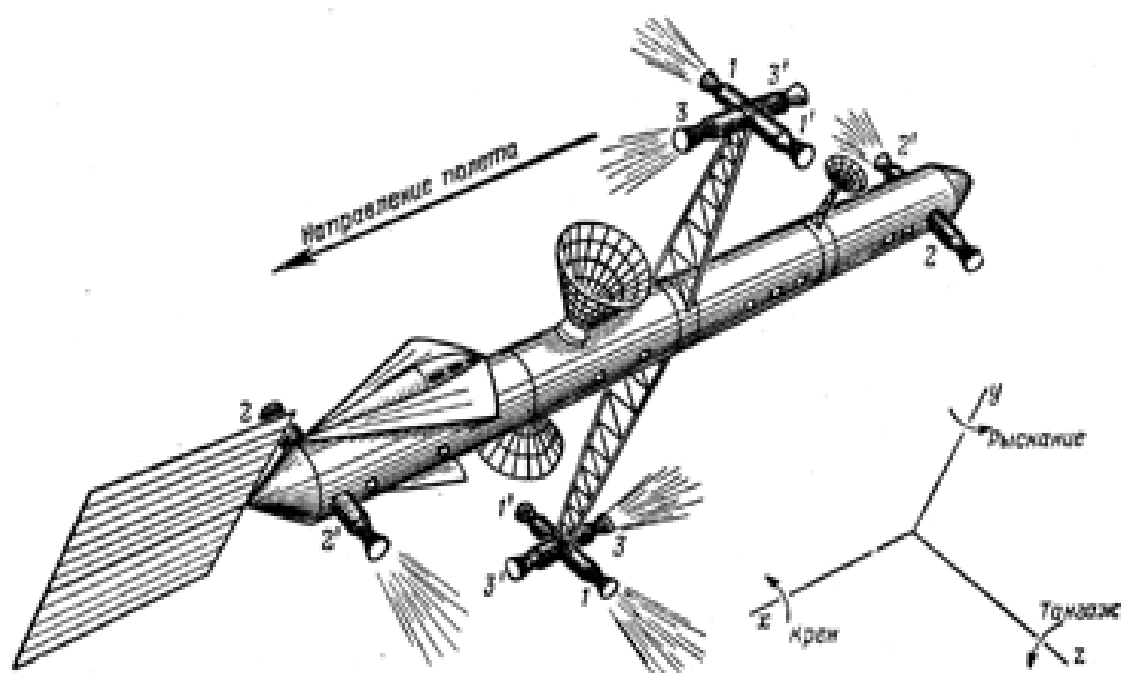


Рис. 5.4. Схема стабилизации ШСЗ за допомогою реактивних сопел:
1-1' – за креном; 2-2' – за рысканням; 3-3' – за тангажем.

запрацюють двигуни $1'-1'$. Аналогічно компенсуються моменти навколо осей y і z .

При одночасному виникненні збурень навколо всіх трьох осей запускаються три відповідні пари двигунів стабілізації. Так, якщо діють відразу три моменти обертання, зображені на рис. 5.4 стрілками, то необхідно включити пари двигунів $1-1$, $2'-2'$ і $3-3$.

Для стабілізуючої системи тривалої дії можна застосовувати плазмові або іонні двигуни, здібні розвивати високі швидкості витікання при невеликих витратах робочого тіла. Але для таких двигунів треба мати додаткові ресурси електроенергії на борту ШСЗ.

Якому ж з розглянутих способів стабілізації орбітальних космічних апаратів можна віддати перевагу при створенні ШСЗ?

Поки ще не можна відповісти на це запитання однозначно.

Мабуть, ШСЗ обов'язково повинен мати активну систему стабілізації, яка швидко й точно реагуватиме на будь-які зовнішні чи внутрішні збурення, а також дозволить швидко та надійно змінювати його орієнтацію за командою оператора.

Активну систему слід доповнювати пасивними методами стабілізації, якщо конструктори ШСЗ заздалегідь потурбуються про раціональний розподіл мас і належний вибір геометричної форми супутника, що значно ефективніше робити на етапі його проектування, зокрема, з використанням САПР.

5.3. Стабілізація супутника маховиками

Далі будемо розглядати випадок, коли для точної орієнтації та стабілізації супутника використовуватимуться виконавчі органи у вигляді двигунів маховиків. Для визначеності будемо вважати, що супутник має чотири маховика, які встановлені в корпусі ШСЗ відповідно до схеми фірми *General Electric* [90] (рис. 5.5). При цьому вектори їх кінетичних моментів $M_i (i = \overline{1,4})$ проходять через вершини a, b, c і d прямокутного паралелепіпеда. Його грані паралельні осям зв'язаної із ШСЗ системи координат xuz [91].

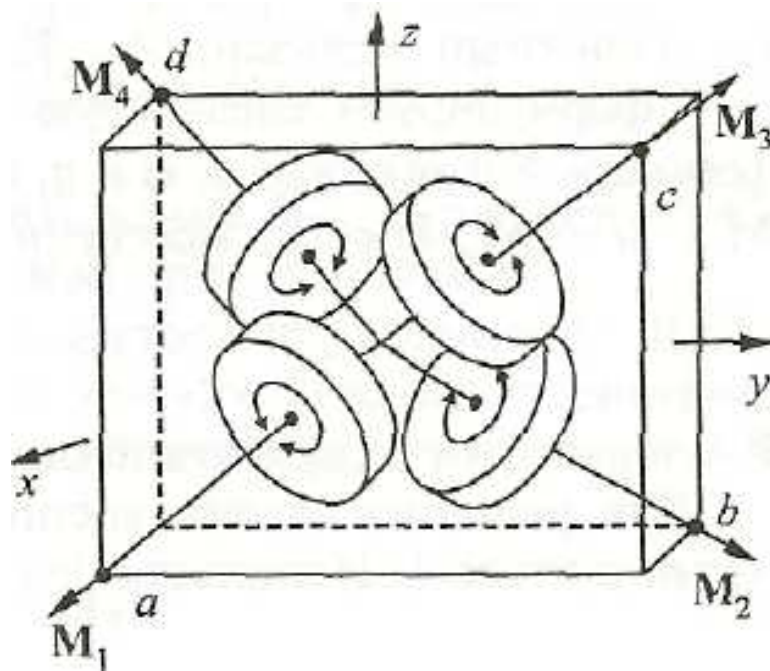


Рис 5.5. Схема просторового розташування маховиків у корпусі ШСЗ.

Чотири маховика формують керуючі моменти, причому у випадку виходу з ладу одного з них решта три маховика повинні забезпечувати повне управління та стабілізацію ШСЗ стосовно трьох ортогональних осей.

Застосуємо три координатні базиси (три праві трійки взаємно ортогональних осей):

- ζ – інерціальний базис – його початок знаходиться в центрі Землі (точка O_1), три орта $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ направлені на три нерухомі зірки;
- z – базис, зв'язаний із ШСЗ – його початок знаходиться в центрі мас ШСЗ (точка O), а осі співпадають з центральними осями інерції супутника;
- η – орбітальний базис – з початком в центрі мас ШСЗ і ортами η_1, η_2, η_3 , причому орт η_1 направлений в площині орбіти в сторону руху КА, орт η_2 ортогональний площині орбіти, направлений так, що обертання КА на орбіті відбувається проти часової стрілки; нарешті, одиничний вектор η_3 співпадає з напрямом геоцентричної вертикалі.

Нехай перехід від інерціального базису до орбітального визначається кватерніоном \mathbf{L} , від орбітального до зв'язаного – кватерніоном $\mathbf{\Lambda}$, а прямиий перехід від інерціального базису до зв'язаного – кватерніоном \mathbf{K} (рис 5.6).

Під кватерніоном зазвичай розуміється число, яке представлено в деякому чотиривимірному просторі \mathcal{K} з однією дійсною одиницею $\mathbf{1}$ і трьома уявними одиницями $\mathbf{i}_k (k = \overline{1, 3})$ та з дійсними елементами $\lambda_k, k = 0, 3$, і має вигляд

$$\mathbf{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3.$$

Необхідність розширення операцій тривимірної векторної алгебри до операції ділення привела Гамільтона (1843 р.) до введення алгебри чотиривимірних чисел або кватерніонів [92, 93].

Наведемо основні постулати, що визначають дії з кватерніонами [94]:

1. Два кватерніони $\mathbf{\Lambda}$ і \mathbf{M} рівні, якщо рівні їх елементи

$$\lambda_i = \mu_i, \quad i = \overline{0, 3}.$$

2. Сумою кватерніонів $\mathbf{\Lambda}$ і \mathbf{M} називається кватерніон, елементи якого є величини $\lambda_i + \mu_i$.

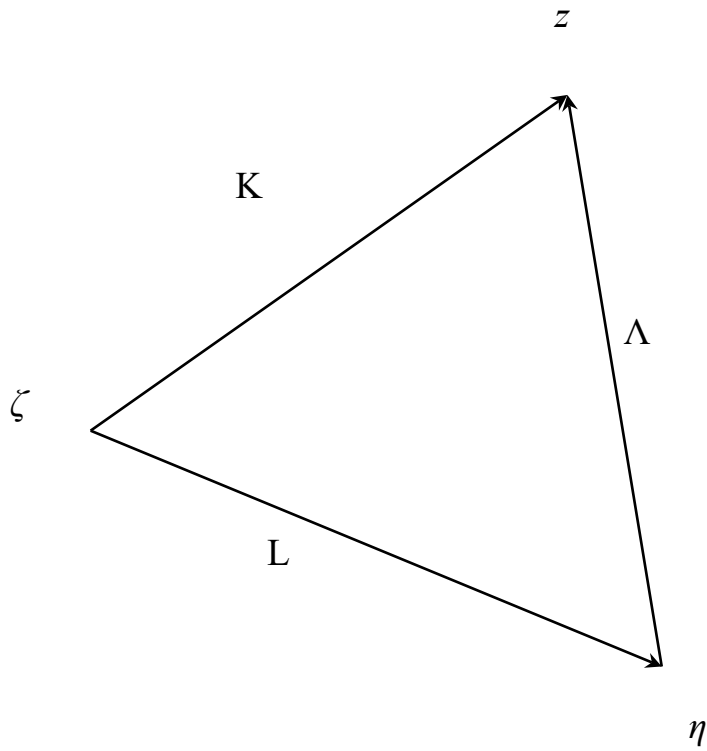


Рис 5.6. Зв'язок між координатними базисами, що використовуються в задачах стабілізації ШСЗ.

3. При множенні кватерніона Λ на скаляр a відбувається множення на це число всіх його елементів. Зокрема, від'ємним буде кватерніон

$$-\Lambda = -\lambda_0 1 - \lambda_1 i_1 - \lambda_2 i_2 - \lambda_3 i_3,$$

а нульовим – кватерніон $(0, 0, 0, 0)$. З цих визначень випливає, що додавання кватерніонів і множення їх на скаляр підпорядковуються правилам звичайної алгебри.

4. Одиниці $1, i_1, i_2, i_3$ можна розглядати як одиничні вектори (орти) чотиривимірного простору \mathcal{K} . Тоді будь-який кватерніон можна представити в цьому просторі точкою або радіус-вектором. Додавання і множення їх на скаляр в просторі \mathcal{K} відбувається таким же чином, як і в звичайному векторному просторі. Особливість простору \mathcal{K} полягає в тому, що він є замкнутим відносно операцій не тільки множення, але й ділення.
5. Закон множення кватерніонів можна задати табл. 5.1. При цьому елементи таблиці будуються за правилом $i_{jk} = i_j \circ i_k$ ($j, k = \overline{1, 3}$) (\circ – символ кватерніонного множення). При такому законі множення добуток двох кватерніонів також є кватерніоном.
6. Цей закон надзвичайно вдалий – завдяки йому алгебра кватерніонів містить у собі алгебру дійсних чисел $(a, 0, 0, 0)$ з однією (дійсною) одиницею 1 , алгебру комплексних чисел $(a, b, 0, 0)$ з двома одиницями (дійсною 1 і уявною i_1) і алгебру векторів $(0, a, b, c)$ в просторі трьох вимірів.
7. З табл. 5.1 видно, що множення на 1 не змінює кватерніон, тобто компонент 1 поводить себе як звичайний скаляр. Тому надалі у виразі для кватерніона перший член (λ_0) будемо писати без одиниці 1 .
8. Можна ідентифікувати одиниці i_k ($k = \overline{1, 3}$) ортами тривимірного простору і розглядати коефіцієнти при цих одиницях як компоненти вектора. Відповідно до цього кватерніон представляється у вигляді суми скалярної і векторної частин

Таблица 5.1

	1	i_1	i_2	i_3
1	1	i_1	i_2	i_3
i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$
i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda.$$

9. Множення кватерніонів не комутативне. Перестановка співмножників допустима лише тоді, коли один співмножник скалярний або коли векторні частини співмножників пропорційні.

10. Кватерніон, спряжений до кватерніона Λ , позначається як

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda.$$

11. Спряжене до суми кватерніонів дорівнює сумі спряжених кватерніонів

$$\overline{(\Lambda + \mathbf{M})} = \bar{\Lambda} + \bar{\mathbf{M}}.$$

12. Спряжене до добутку кватерніонів дорівнює добутку їх спряжених значень, записаному в оберненому порядку

$$\overline{(\Lambda \circ \mathbf{M})} = \bar{\mathbf{M}} \circ \bar{\Lambda}.$$

13. Оскільки векторні частини кватерніонів Λ і $\bar{\Lambda}$ відрізняються лише знаком, то

$$\Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda.$$

Цей добуток називається *нормою* кватерніона Λ , позначається $\|\Lambda\|$ і задається формулою

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

14. Норма кватерніона – це скаляр; $\|\Lambda\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 = 0;$$

коли норма $\|\Lambda\| = 1$, кватерніон називається *нормованим*, а його компоненти визначаються як *параметри Родріга-Гамільтона*.

15. Кватерніон, обернений до кватерніона Λ , буде в загальному випадку визначатись виразом

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|},$$

а у випадку нормованого кватерніона, для якого виконується рівність

$$\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,$$

відома як умова нормування параметрів Родріга-Гамільтона, для зворотного кватерніона буде виконуватися умова $\Lambda^{-1} = \bar{\Lambda}$, а також відповідно

$$\Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = 1.$$

16. Приймаючи до уваги всі ці наведені властивості кватерніонів, рівняння

$\mathbf{N} = \Lambda \circ \mathbf{M}$ при невідомому \mathbf{M} можна розв'язати наступним чином:

$$\mathbf{M} = \Lambda^{-1} \circ \mathbf{N} = \frac{\bar{\Lambda} \circ \mathbf{N}}{\|\Lambda\|}.$$

Повернемося тепер до задачі стабілізації супутника і представимо кватерніон \mathbf{K} з рис. 5.7 у вигляді добутку кватерніонів [94]

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \circ \Lambda \quad (5.1)$$

Якщо продиференціювати співвідношення (5.1) і врахувати кінематичні кватерніонні рівняння [94,95] виду $\dot{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \circ \Omega_\eta$, то після необхідних перетворень отримаємо кінематичне рівняння руху ШСЗ відносно орбітальної системи координат у вигляді

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} (\Lambda \circ \Omega_z - \Omega_\eta \circ \Lambda), \quad (5.2)$$

де Ω_η – кватерніонне відображення вектора орбітальної швидкості ω_{orb} ШСЗ у проєкціях на осі орбітальної системи η , Ω_z – кватерніонне відображення абсолютної кутової швидкості ШСЗ ω_z на осі зв'язаної системи координат z (далі $\omega_z = \omega$).

Слід зазначити, що кватерніонне відображення будь-якого вектора, зокрема, ω – це вироджений кватерніон: з нульовою скалярною частиною і векторною частиною, компонентами якої є відповідні компоненти цього вектора в обумовленій системі координат, так що

$$\Omega_\eta = [0 \ \omega_{\eta_1} \ \omega_{\eta_2} \ \omega_{\eta_3}], \quad \Omega_z = [0 \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3].$$

Оскільки добуток будь-яких кватерніонів $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ можна представити через їх кватерніонні матриці M і N та матриці-стовбці a і b у вигляді [96]

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = M(a) b = N(b) a,$$

то рівняння (5.2) в матричному вигляді прийме форму

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} [N(\omega) + M^T(\omega_\eta)] \lambda. \quad (5.3)$$

Тут T – знак транспонування матриць, а також

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & U(\omega) \end{bmatrix}, \quad N(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & U^T(\omega) \end{bmatrix}, \quad U(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Відмітимо декілька очевидних властивостей матриць M і N [97]:

1) Матриці M і N та їх векторні ядра U є елементами алгебри \mathbf{M} , ізоморфної кватерніонній (векторній) алгебрі простору \mathcal{K} , коли кожному кватерніону \mathbf{P} і його векторній частині p , які належать простору \mathcal{K} , відповідають матриці $M(p)$, $N(p)$ і $U(p) \in \mathbf{M}$. Таким чином, кватерніонному множенню двох будь-яких кватерніонів \mathbf{P} і \mathbf{Q} в просторі \mathcal{K} відповідає матричний добуток кватерніонної та стовпчикової матриць у просторі \mathbf{M} . При цьому можна записати $\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} \leftrightarrow M(p)q$, де p, q – стовпчикові матриці розміру 4×1 , побудовані відповідно з компонент кватерніонів \mathbf{P} і \mathbf{Q} .

2) Подібно матрицям направляючих косинусів матриці M і N ортогональні. Маємо $M^{-1} = M^T$, $N^{-1} = N^T$ (при цьому матриця M^T відповідає спряженому кватерніону $\bar{\Lambda}$) і як наслідок $MM^T = M^T M = N^T N = NN^T = I_4$ (I_4 – одинична матриця четвертого порядку).

3) Для кососиметричних матриць $M(\omega)$ і $N(\omega)$, які відповідають кватерніонним відображенням векторів, справедливі рівності

$$M^T(\omega) = -M(\omega), \quad N^T(\omega) = -N(\omega).$$

4) Матриці M і N у своїх групах некомутативні. Неважко перевірити, що

$$M(\omega)M(\omega_\xi) \neq M(\omega_\xi)M(\omega), \quad N(\omega)N(\omega_\xi) \neq N(\omega_\xi)N(\omega).$$

5) Матриці M і N комутують між собою: $MN = NM$. Це співвідношення справедливе і для матриць обернених (транспонованих) до M і N .

6) Через матриці $M(\lambda)$ і $N(\lambda)$ легко виражається матриця направляючих косинусів A_λ в параметрах Родріга-Гамільтона. Маємо

$$N(\lambda)M^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_\lambda & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Неважко одержати аналогічну рівність для матриці, оберненої (транспонованої) до A_λ . За правилом транспонування добутку матриць [98] матимемо

$$M(\lambda)N^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_\lambda^T & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

7) Для матриць M і N розміру 4×4 і будь-яких двох стовпчикових матриць p і q розміру 4×1 справедливе співвідношення $M(p)q = N(q)p$, яке встановлює зв'язок між матрицями M і N та забезпечує комутативність аргументу матриці M (або N) з наступним співмножником – стовпчиковою матрицею (при цьому матриця M замінюється на N і навпаки).

8) З рівності однотипних матриць $M(p) = M(q)$, $N(p) = N(q)$ випливає рівність їх аргументів $p = q$. Справедливе й зворотне твердження.

9) При множенні однотипних матриць M і N їх тип зберігається:

$$\prod_{i=1}^n M_i = M, \quad \prod_{i=1}^n N_i = N.$$

10) При додаванні однотипних матриць M і N їх тип зберігається, а аргументи

$$\text{складаються. Маємо } \sum_{i=1}^n M(p_i) = M\left(\sum_{i=1}^n p_i\right), \quad \sum_{i=1}^n N(p_i) = N\left(\sum_{i=1}^n p_i\right).$$

11) При варіюванні матриць M і N варіюються їх аргументи:

$$\delta M(p) = M(\delta p), \quad \delta N(p) = N(\delta p).$$

5.4. Стабілізація орієнтації супутника як динамічного об'єкта

Вважатимемо орбіту ШСЗ круговою. Тоді вектор кутової орбітальної швидкості ω_η з (5.3) буде мати вигляд $\omega_\eta = [0 \ 0 \ \omega_{*3}]^T$, $\omega_{*3} = -\sqrt{\mu/R^3}$, де $\mu = 398600,4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравітаційна постійна Землі, $R = 42164 \text{ км}$ – радіус орбіти ШСЗ (або її висота 668 км над поверхнею Землі) [99].

Задамо орієнтацію ШСЗ $\lambda \rightarrow \lambda_s$, яка буде відповідати умові $\omega \rightarrow \omega_s$ на його кутову швидкість. Тоді заданий програмний рух ШСЗ буде визначатися рівнянням

$$\dot{\lambda}_s = \frac{1}{2}[N(\omega_s) + M^T(\omega_\eta)]\lambda_s. \quad (5.5)$$

У загальному випадку нехай

$$\lambda = \lambda_s + x, \quad \omega = \omega_s + u \quad (5.6)$$

де x – збурення (відхилення від) заданої орієнтації, u – управління кутовою швидкістю ШСЗ.

Підставивши рівності (5.6) у рівняння (5.3) та врахувавши (5.5), отримаємо рівняння руху ШСЗ у відхиленнях

$$\dot{x} = \frac{1}{2}[M^T(\omega_\eta) + N(\omega_s)]x + \frac{1}{2}M(\lambda)u^0. \quad (5.7)$$

Тут u^0 – вектор управління абсолютною кутовою швидкістю ШСЗ *четвертого* порядку, аналогічний u в (5.6), але з першим нульовим елементом.

Основна задача орієнтації – це синтезувати таке управління u^0 , яке забезпечить $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Позначивши для зручності

$$N(\omega_s) + M^T(\omega_\eta) = A(\omega_s, \omega_\eta), \quad (5.8)$$

перепишемо рівняння (5.7) таким чином:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}[A(\omega_s, \omega_\eta) - M(\lambda)C]x. \quad (5.9)$$

Тут з (5.7)

$$u^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = -Cx \in U, \quad C \in \mathbf{R}_{4 \times 4} \quad (5.10)$$

– шукане стабілізуюче керування.

Розв'яжемо задачу стабілізації ШСЗ, використовуючи другий метод Ляпунова, коли синтез систем стабілізації приводить до розгляду матричного рівняння Ляпунова

$$\dot{D} + D(A - BC) + (A - BC)^T D = -Q^* , \quad (5.11)$$

в якому $D(t), Q^*(x, t)$ – симетричні матриці коефіцієнтів позитивно визначених квадратичних форм

$$V(x, t) = x^T D(t)x, \quad W(x, t) = x^T Q^*(x, t)x, \quad (5.12)$$

що згідно з другим методом Ляпунова повинні задовольняти умову $\dot{V} = -W < 0$ на будь-яких траєкторіях $x = x(x_0, t_0, t)$ вихідної нелінійної системи (5.9), замкнутої обмеженим управлінням (5.10).

Щоб позбутися невизначеності задачі, коли з *одного* рівняння Ляпунова (5.11) треба отримати *дві* матриці – матрицю управління C з (5.10) і матрицю D коефіцієнтів квадратичної форми V – функції Ляпунова з (5.12), застосуємо до неї метод прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації [8], детально викладений в розд. 3.

Перепишемо рівняння Ляпунова (5.11) в позначеннях (5.8), поклавши в ньому $D = const$ і для зручності $Q^* = DQD$. В результаті будемо мати

$$D(A - MC) - (A - MC)^T D = -2DQD. \quad (5.13)$$

Застосуємо до рівняння Ляпунова (5.13) метод кососиметризації [1], для чого його варто переписати у вигляді $[D(A - MC) + DQD] + [D(A - MC) + DQD]^T = 0$, коли його можна задовольнити довільною кососиметричною матрицею DSD , так що $[D(A - MC) + DQD] = -DSD$.

У результаті отримаємо

$$M(\lambda)C = A + (Q + S)D. \quad (5.14)$$

Закон керування (5.14) можна спростити, врахувавши властивість (2) кватерніонних матриць M і поклавши в ньому $D = I_4$ – одинична матриця. Тоді будемо мати $C = M^T(\lambda)(A + Q + S)$ або з урахуванням позначення (5.8) відповідно

$$C = M^T(\lambda)[M^T(\omega_\eta) + N(\omega_s) + Q + S]. \quad (5.15)$$

Перепишемо рівняння (5.3) і (5.5) так, щоб вони відповідали системам з керуючими органами:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} M^T(\omega_\eta) \lambda + \frac{1}{2} M(\lambda) u^0, \quad (5.16a)$$

$$\dot{\lambda}_s = \frac{1}{2} M^T(\omega_\eta) \lambda_s + \frac{1}{2} M(\lambda_s) \omega_s^0. \quad (5.16b)$$

Тоді згідно з (5.6) та (5.10) будемо мати

$$u^0 = \omega^0 - \omega_s^0 = -C(\lambda - \lambda_s), \quad (5.17)$$

причому, керування (5.15), (5.17), задовольняючи відповідне кінематичне рівняння ШСЗ (5.16a), гарантує виконання умови $\omega \rightarrow \omega_s$ при $\lambda \rightarrow \lambda_s$ і навпаки, а програмне значення абсолютної кутової швидкості ШСЗ буде визначатися виразом

$$\omega_s^0 = M^T(\lambda_s) N(\lambda_s) \omega_\eta^0 + 2M^T(\lambda_s) \dot{\lambda}_s, \quad (5.18)$$

отриманим з (5.16b).

Остаточно застabilізований рух ШСЗ буде згідно з (5.16a), (5.17) і (5.15) описуватися рівнянням

$$\dot{\lambda} = -\frac{1}{2} [N(\omega_s) + Q + S] \lambda + \frac{1}{2} [M^T(\omega_\eta) + N(\omega_s) + Q + S] \lambda_s. \quad (5.19)$$

5.5. Динаміка ШСЗ з маховиками

Математична модель механічної системи, що складається з твердого тіла (ШСЗ) з діагональним тензором інерції J_* та чотирьох маховиків має вигляд [100]:

$$J_* \dot{\omega} + U(\omega) J_* \omega + G \dot{q}_z + U(\omega) G q_z = 0 \quad (5.20)$$

де $J_* = \text{diag}[J_1 J_2 J_3]$ – діагональний тензор інерції ШСЗ;

ω – абсолютна кутова швидкість ШСЗ в проекціях на осі z , зв'язані зі ШСЗ;

q_z – кінетичні моменти маховиків в проекціях на осі z ;

$U(\omega)$ – матриця коефіцієнтів, що має вигляд (5.4) ;

G – матриця, що дозволяє з чотирьох маховиків вибрати три робочі: $G = [I_3 0]$;

I_3 – одинична матриця третього порядку.

Кінетичні моменти маховиків визначаються виразами: $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$, $q_i = J_i \dot{\phi}_i$, де $\dot{\phi}_i$ – кутова швидкість i -го маховика, J_i – його момент інерції відносно осі власного обертання.

Покладемо формально в рівнянні (5.20)

$$G\dot{q}_z + U(\omega)Gq_z = u_z, \quad (5.21)$$

де $u_z \in \mathbf{R}_{3 \times 1}$ – вектор управління ШСЗ з використанням маховиків (тим самим врахування впливу маховиків на динаміку ШСЗ замінюється відповідною реакцією зв'язку u_z). Тоді з нього матимемо незалежну (поки що від маховиків) задачу синтезу управління кутовою швидкістю ШСЗ

$$J_* \dot{\omega} + U(\omega)J_* \omega + u_z = 0. \quad (5.22)$$

Помножимо рівняння (5.22) зліва на J_*^{-1} , отримаємо його у формі Коші

$$\dot{\omega} + J_*^{-1}U(\omega)J_* \omega + J_*^{-1}u_z = 0. \quad (5.23)$$

Необхідно синтезувати в рівнянні (5.23) таке управління u_z , щоб ω прямувало до ω_s – заданого значення кутової швидкості з (5.19).

При $\omega = \omega_s$ в рівнянні (5.23) управління буде дорівнювати нулю, отже

$$\dot{\omega}_s = J_*^{-1}U^T(\omega_s)J_* \omega_s. \quad (5.24)$$

Введемо такі позначення:

$$\tilde{A}(\omega) = J_*^{-1}U^T(\omega)J_* = \begin{bmatrix} 0 & J_{21}\omega_3 & -J_{31}\omega_2 \\ -J_{12}\omega_3 & 0 & J_{32}\omega_1 \\ J_{13}\omega_2 & -J_{23}\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{ij} = \frac{J_i}{J_j}. \quad (5.25)$$

Тоді рівняння (5.23), (5.24) матимуть вигляд

$$\dot{\omega} = \tilde{A}(\omega)\omega - J_*^{-1}u_z, \quad (5.26)$$

$$\dot{\omega}_s = \tilde{A}(\omega_s)\omega_s. \quad (5.27)$$

Кутова швидкість ШСЗ у відхиленнях від бажаної описується рівністю

$$\omega - \omega_s = y, \quad (5.28)$$

враховуючи яку та віднімаючи від рівняння (5.26) рівняння (5.27), можна отримати рівняння руху ШСЗ у відхиленнях. Будемо мати

$$\dot{y} = \tilde{A}(y)\omega_s + \tilde{A}(\omega)y - J_*^{-1}u_z. \quad (5.29)$$

Розглянемо перетворення

$$\tilde{A}(y)\omega_s = \begin{bmatrix} 0 & J_{21}y_3 & -J_{31}y_2 \\ -J_{12}y_3 & 0 & J_{32}y_1 \\ J_{13}y_2 & -J_{23}y_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{s1} \\ \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \end{bmatrix} = \tilde{A}_*(\omega_s)y, \quad (5.30)$$

де

$$\tilde{A}_*(\omega_s) = \begin{bmatrix} 0 & -J_{31}\omega_{s3} & J_{21}\omega_{s2} \\ J_{32}\omega_{s3} & 0 & -J_{12}\omega_{s1} \\ -J_{23}\omega_{s2} & J_{13}\omega_{s1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

З (5.30) випливає цікаве співвідношення

$$\tilde{A}(y)\omega = \tilde{A}_*(\omega)y. \quad (5.32)$$

Якщо до рівняння (5.29) застосувати перетворення (5.30), то з (5.29) отримаємо

$$\dot{y} = A_1(\omega_s, y)y - J_*^{-1}u_z, \quad (5.33)$$

причому

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & (J_{21} - J_{31})\omega_{s3} + J_{21}y_3 & (J_{21} - J_{31})\omega_{s2} - J_{31}y_2 \\ (J_{32} - J_{12})\omega_{s3} - J_{12}y_3 & 0 & (J_{32} - J_{12})\omega_{s1} + J_{32}y_1 \\ (J_{13} - J_{23})\omega_{s2} + J_{13}y_2 & (J_{13} - J_{23})\omega_{s1} - J_{23}y_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Для стабілізації системи (5.33) потрібно синтезувати стабілізуюче управління за зворотним зв'язком виду (5.10), а саме

$$u_z = C_1 y = C_1(\omega - \omega_s). \quad (5.35)$$

Тоді рівняння (5.33) набуде вигляду

$$\dot{y} = (A_1 - J_*^{-1}C_1)y. \quad (5.36)$$

Застосовуючи знову другий метод Ляпунова, виберемо додатно визначену квадратичну форму $V_1 = y^T D_1 y > 0$, а її повну похідну у часі $W_1 = -y^T D_1 Q_1 D_1 y < 0$ – від'ємно визначену квадратичну форму. В результаті отримаємо рівняння Ляпунова, подібне до (5.11), а саме

$$D_1(A_1 - J_*^{-1}C_1) + (A_1 - J_*^{-1}C_1)^T D_1 = -2D_1 Q_1 D_1, \quad (5.37)$$

з матрицями D_1 і Q_1 у вигляді [106]

$$D_1 = \text{diag}[d_{11}^2, d_4^2, d_{22}^2], \quad Q_1 = \text{diag}[d_{11}^2 q_{11}^2, d_4^2 q_2^2, d_{22}^2 q_{22}^2]. \quad (5.38)$$

Застосувавши до рівняння (5.37) процедуру методу кососиметризації (5.13)–(5.14), отримаємо матрицю управління

$$C_1 = J_*^{-1}[A_1 + (Q_1 + S_1)D_1], \quad (5.39)$$

з якою рівняння (5.26) переписеться так:

$$\dot{\omega} = \tilde{A}(\omega)\omega - [A_1 + (Q_1 + S_1)D_1](\omega - \omega_s). \quad (5.40)$$

Отже, остаточно застabilізований рух ШСЗ опишеться рівнянням

$$\dot{\omega} = -(Q_1 + S_1)D_1(\omega - \omega_s) + \tilde{A}_*(\omega_s)\omega_s, \quad (5.41)$$

де ω_s – програмне значення абсолютної кутової швидкості ШСЗ, задане в задачі його орієнтації формулою (5.19).

Підставивши в рівняння (5.41) значення матриць D_1 Q_1 з (5.37), поклавши $S_1 = 0$ та врахувавши формулу (5.25) для $\tilde{A}(\omega_s)$, отримаємо диференціальне динамічне рівняння застabilізованого руху ШСЗ в матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} d_{11}^4 q_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_4^4 q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22}^4 q_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}^4 q_{11}^2 & J_{21}\omega_{s3} & -J_{31}\omega_{s2} \\ -J_{12}\omega_{s3} & d_4^4 q_2^2 & J_{32}\omega_{s1} \\ J_{13}\omega_{s2} & -J_{23}\omega_{s1} & d_{22}^4 q_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{s1} \\ \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

5.6. Динамічні рівняння системи маховиків

Для маховиків маємо рівняння [100, 101]

$$\dot{q}_z = U^T(\omega)q_z + C_1(\omega, \omega_s)\omega, \quad (5.43)$$

$$\dot{q}_z = -J_*\dot{\omega} + M_m, \quad (5.44)$$

які описують їх поведінку в системі ШСЗ, причому рівняння (5.43) отримане з (5.21) з урахуванням (5.35), (5.39), а в (5.44) $M_m = M_{e0} - k_{mp} \text{sign } \dot{\phi} - k\dot{\phi}$,

де

M_{e0} – вектор моментів електродвигунів системи маховиків;

$k_{mp} \text{sign } \dot{\phi}$, $k\dot{\phi}$ – відповідно, моменти сухого та в'язкого тертя в підшипниках маховиків;

$\dot{\phi} = [\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3]^T$, причому $\dot{\phi}_i$ – власна кутова швидкість i -го маховика.

Використовуючи (5.41), виключимо в (5.44) $\dot{\omega}$. Тоді отримаємо

$$\dot{q}_z = -J_*[-(Q_1 + S_1)D_1(\omega - \omega_s) + \tilde{A}_*(\omega_s)\omega_s] + M_{e0} - k_{mp} \text{sign } \dot{\varphi} - k\dot{\varphi}, \quad (5.45)$$

а виключаючи далі \dot{q}_z в рівняннях (5.43), (5.45), одержимо явний вираз вектора моментів електродвигунів

$$M_{e0} = U^T(\omega)q_z + J_*[\{\tilde{A}_*(\omega_s) + \tilde{A}(\omega) + (Q_1 + S_1)D_1\}\omega - \tilde{A}_*(\omega_s)\omega_s]. \quad (5.46)$$

5.7. Оптимальне управління супутником

Проблема оптимізації управління системою виникає при обмежених енергетичних ресурсах, коли реалізація управління певною потужністю для стабілізації супутника виявляється неможливою. Тоді ймовірні або залишкові похибки стабілізації, або перехід об'єкта не в задану точку, а в її приблизний окіл.

За критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського [81]

$$I(y, u, u_{opt}) = \int_{t_0}^{\infty} (y^T Q(y, t)y + u^T R^{-1}u + y^T D B R B^T D y) dt \rightarrow \min_{u \in U},$$

де $Q(y, t) = Q_1$ визначається формулою (5.38), $R = \text{diag}[r_1^2 \quad r_2^2 \quad r_3^2]$ – додатно визначена матриця вагових коефіцієнтів, побудуємо оптимальне управління, прирівнявши матрицю підсилення стабілізуючого управління $C_1(\omega, \omega_s)$ з виразу (5.39) до матриці підсилення оптимального управління $K = -R J_*^{-1} D_1$ з матрицею D_1 , що визначається відповідною формулою (5.38).

В результаті отримаємо управління, яке забезпечує оптимальну стабілізацію супутника у вигляді

$$u_{opt} = (R J_*^{-1} D_1 - J_* A_1)(\omega - \omega_s). \quad (5.47)$$

Запишемо рівняння замкнутої системи з оптимальним управлінням згідно з формулою (5.26). Матимемо

$$\dot{\omega} = \tilde{A}(\omega)\omega - J_*^{-1} u_{opt}(\omega - \omega_s). \quad (5.48)$$

Підставивши в (5.48) вираз (5.47), отримаємо

$$\dot{\omega} = -J_*^{-1} R J_*^{-1} D_1(\omega - \omega_s) + \tilde{A}_*(\omega_s)\omega_s, \quad (5.49)$$

або остаточно в кінцевому варіанті

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} d_{11}^2 r_1^2 / J_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_{42}^2 r_2^2 / J_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22}^2 r_3^2 / J_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}^2 r_1^2 / J_1^2 & J_{21} \omega_{s3} & -J_{31} \omega_{s2} \\ -J_{12} \omega_{s3} & d_{42}^2 r_2^2 / J_2^2 & J_{32} \omega_{s1} \\ J_{13} \omega_{s2} & -J_{23} \omega_{s1} & d_{22}^2 r_3^2 / J_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{s1} \\ \omega_{s2} \\ \omega_{s3} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

5.8. Функціонування САПР оптимальної стабілізації штучного супутника Землі

З бази даних САПР (див. рис.1.4) обрано математичну модель динамічного об'єкта виду (5.20).

Для розв'язання задачі стабілізації ШСЗ використовується другий метод Ляпунова, а щоб позбутися невизначеності задачі, коли з *одного* рівняння Ляпунова (5.37) треба отримати *дві* матриці, до неї застосовується метод прямого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації, його шостий алгоритм з класифікації, зазначеної в розд. 3. Одночасно сама матриця управління (5.39) знаходиться методом кососиметризації рівняння (5.37).

Заповнюється структура стабілізуючого регулятора з бази даних САПР. При використанні рівностей (5.34), (5.38), отримуємо

$$C_1 = J_*[A_1 + (Q_1 + S_1)D_1]$$

Параметрична оптимізація реалізується із застосуванням критерію узагальненої роботи О.А. Красовського

$$I(y, u, u_{opt}) = \int_{t_0}^{\infty} (y^T Q(y, t) y + u^T R^{-1} u + y^T DBR B^T D y) dt \rightarrow \min_{u \in U}$$

САПР ШСЗ заповнюється структура оптимального регулятора у вигляді $u_{opt} = (R J_*^{-1} D_1 - J_* A_1)(\omega - \omega_s)$.

В результаті стабілізації та оптимізації ШСЗ отримуємо повністю спроектовану система виду (5.50).

5.9. Математичне моделювання руху супутника

Промодельюємо рівняння (5.42) та (5.50) кутового руху супутника методом Рунге-Кутта в середовищі *MatLab* зі стабілізуючим та оптимальним управлінням за початкових умов $\omega(0) = [0, 1; 0, 1; 0, 1]$, заданих кутових швидкостях $\omega_{s1} = -0,01$, $\omega_{s2} = -0,02$, $\omega_{s3} = -0,03$ і значеннях коефіцієнтів

$J_1 = 30, J_2 = 35, J_3 = 40; d_{11} = 0,5, d_4 = 0,7, d_{22} = 0,9; q_{11} = 5, q_2 = 7, q_{22} = 9,$ а для оптимального управління приймемо $r_1 = 1,5, r_2 = 3,7, r_3 = 7,8.$

Результати моделювання представлені відповідно на рис. 5.7 – 5.9.

З цих рисунків випливає, що отримане оптимальне управління ШСЗ забезпечує стабілізацію системи значно раніше (відхилення кутової швидкості ω_1 досягає значення $\omega_{s1} = -0,01$ вже на 1-й секунді (рис 5.7), відхилення кутової швидкості ω_2 досягає значення $\omega_{s2} = -0,02$ на 0,26 секунди (рис.5.8), відхилення кутової швидкості ω_3 досягає значення $\omega_{s3} = -0,03$ на 0,09 секунди (рис.5.9), тоді як при неоптимальному стабілізуючому управлінні відхилення кутової швидкості ω_1 досягає значення $\omega_{s1} = -0,01$ на 4,6 секунди (рис.5.7), відхилення кутової швидкості ω_2 досягає значення $\omega_{s2} = -0,02$ на 0,36 секунди (рис.5.8), відхилення кутової швидкості ω_3 досягає значення $\omega_{s3} = -0,03$ на 0,16 секунди (рис.5.9)), тобто, оптимальне керування підвищує якість стабілізації ШСЗ в середньому на 30 %.

5.10. Проблеми спостереження вектора стану нелінійних динамічних систем

За своїми характеристиками збурення в системі та у вимірюваннях можуть бути детермінованими, стохастичними, невизначеними і змішаними.

Що стосується *детермінованих* збурень в системі та у вимірюваннях, то в чистому вигляді вони практично не зустрічаються та існують лише у *змішаному* варіанті. В математичному плані детерміновані складові легко визначити та виключити в процесі розв'язання задачі спостереження.

В *стохастичних* задачах нелінійної фільтрації випадкових величин вдається виділити декілька основних напрямків [108-110].

Для дискретних вимірювань в стаціонарному варіанті, головним чином, використовується або метод *максимальної правдоподібності*, або *метод найменших квадратів*. Обидва ці методи можуть використовуватись для оцінок параметрів коваріацій. Метод максимальної правдоподібності більш точний, але й більш громіздкий порівняно з методом найменших квадратів, який в свою

$\omega_1(t)$

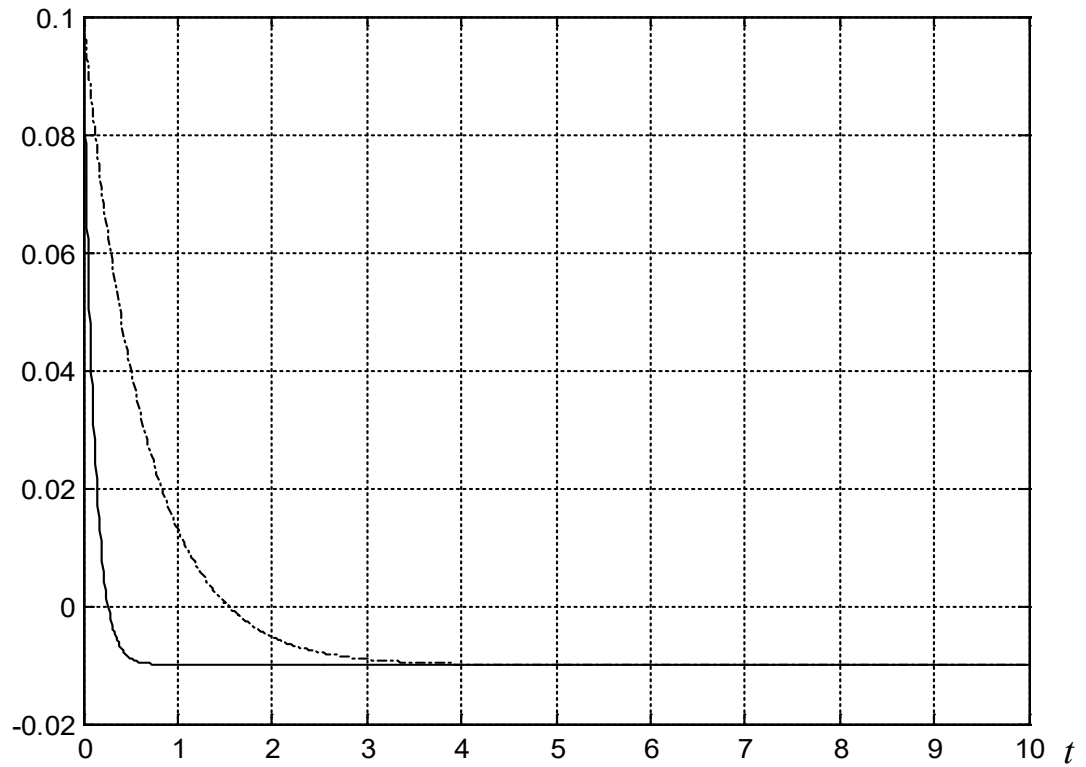


Рис 5.7. Кутова швидкість $\omega_1(t)$ супутника зі стабілізуючим неоптимальним

(позначено штрих-пунктиром) та оптимальним управлінням

(позначено суцільною лінією) при початкових умовах $\omega_1(0) = 0,1$,

$t \in [0;10]$ і заданому значенні $\omega_{s1} = -0,01$.

$\omega_2(t)$

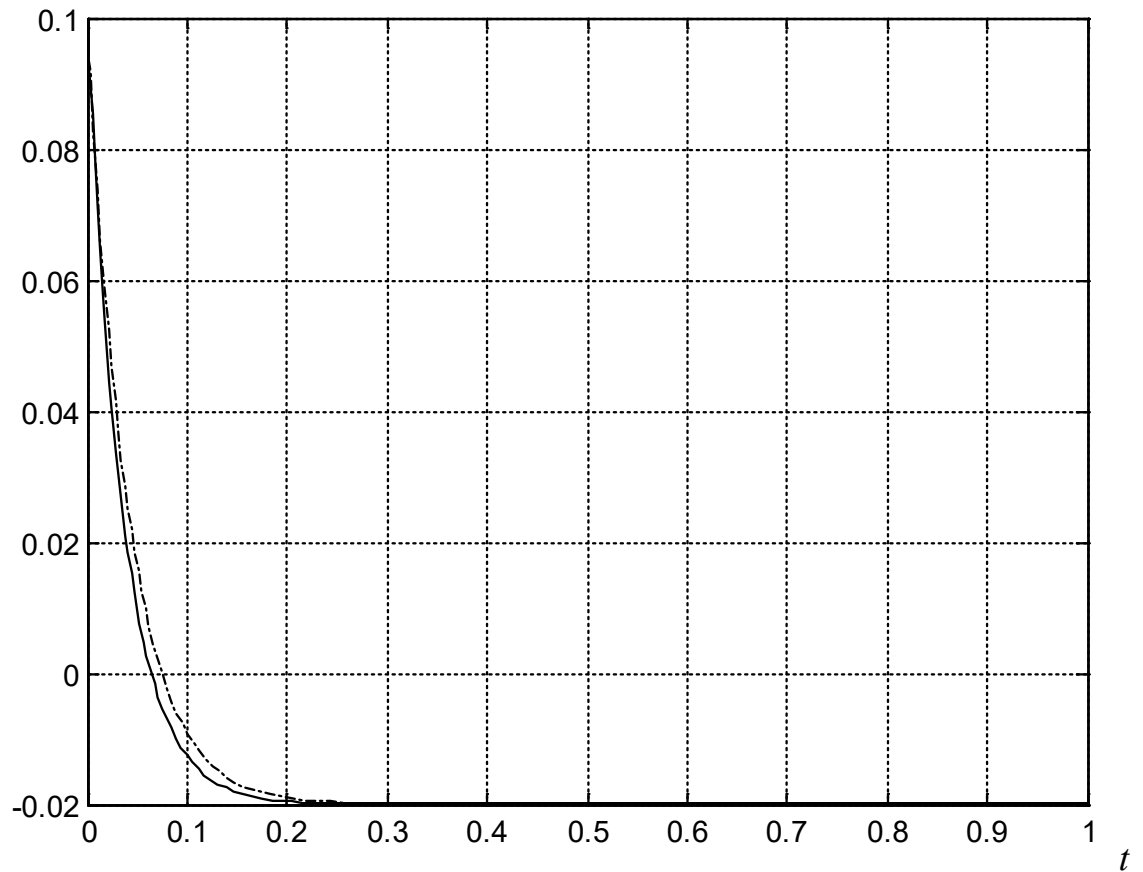


Рис 5.8. Кутова швидкість $\omega_2(t)$ супутника зі стабілізуючим

неоптимальним (позначено штрих-пунктиром) та оптимальним

управлінням (позначено суцільною лінією) при початкових

умовах $\omega_2(0) = 0,1$, $t \in [0;1]$ і заданому значенні $\omega_{s2} = -0,02$.

$\omega_3(t)$

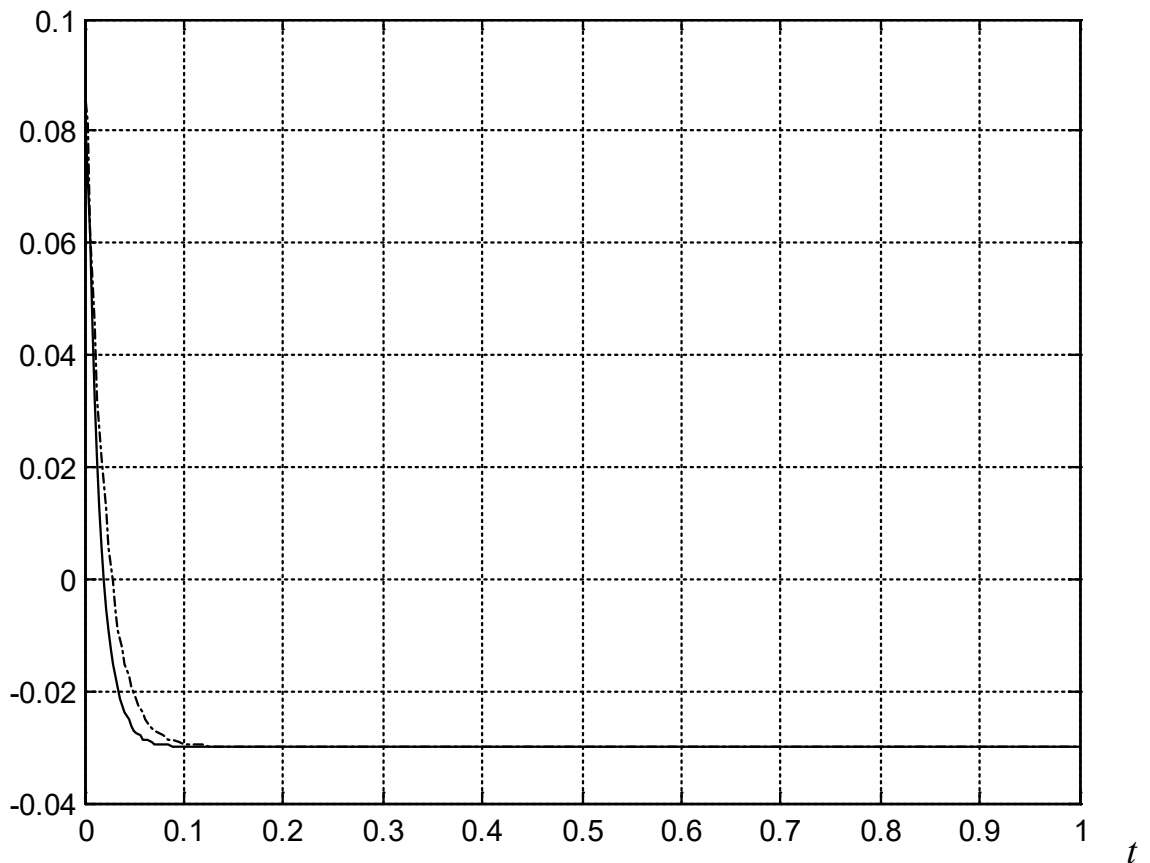


Рис 5.9. Кутова швидкість $\omega_3(t)$ супутника зі стабілізуючим неоптимальним (позначено штрих-пунктиром) та оптимальним управлінням (позначено суцільною лінією) при початкових умовах $\omega_3(0) = 0,1$, $t \in [0;1]$ і заданому значенні $\omega_{s3} = -0,03$.

чергу, зручний тим, що не вимагає знання апіорного розподілу випадкових параметрів і простий в реалізації, проте він не рекурентний, не може бути використаний в реальному часі і має погану збіжність [108, 111].

Більш універсальний для задач нелінійної фільтрації метод *мінімуму дисперсії*, який базується на визначенні функції умовної щільності ймовірностей $\rho(x/y)$ стану x при заданих вимірюваннях y [112]. Для першої апостеріорної густини ймовірностей марківського процесу існує інтегро-диференціальне рівняння Стратоновича [109, 110, 112–115], однак його інтегрування для більшості практичних задач супроводжується великими труднощами, часто нездоланими. Тому задачі нелінійної фільтрації, як правило, розв'язуються наближеними методами.

В зв'язку з цим становить певний інтерес наближене розв'язання рівняння Стратоновича для *гауссової* апостеріорної щільності ймовірностей, коли його вдається представити у вигляді замкнутої системи диференціальних рівнянь для вектора умовного математичного очікування і кореляційної матриці. Ця система інтегрується спільно і в залежності від порядку та кількості членів апроксимації нелінійностей називається узагальненим (розширеним) фільтром Калмана відповідного порядку [109, 110, 113, 114, 116–124]. В лінійному випадку вона перетворюється на оптимальний фільтр Калмана [110, 113, 125–128].

Досить вдалий формалізм, запропонований Калманом, сприяє розвитку в нелінійній фільтрації широкого напрямку, побудованого на процедурі *лінеаризації* з використанням як лінійного фільтра Калмана (в системах першого наближення – наприклад [113, 125, 129]), так і його різних модифікацій [108, 114, 116, 130–134]. При цьому практично будь-яку задачу, навіть у випадку невизначених збурень з обмеженнями типу *бортиків* [135, 136], можна звести до задачі оптимальної лінійної фільтрації, використовуючи супремум відповідних збурень для розрахунку їх коваріаційних матриць при апіорному представленні перешкод *білими шумами*.

Однак ці підходи для ефективної реалізації потребують достовірної інформації про динаміку системи і про стохастичні характеристики збурень в початкових умовах, у постійно діючих перешкодах і у вимірюваннях, а вони дуже рідко апріорно ідентифікуються на практиці [137]. До того ж, і стандартний фільтр Калмана, і його можливі модифікації, на жаль, досить часто виявляються розбіжними [108, 110, 130], коли реальна похибка фільтра стає значно більшою за розрахункову і продовжує збільшуватись у часі. На подібну його нестабільність звернув увагу ще Калман [126]. Пізніше ця проблема була розглянута Кноллом і Едельштейном [138] стосовно задач інерціальної навігації і визначення орбіт.

Головні з можливих причин розбіжності фільтра Калмана – це неточне моделювання процесу і спостереження (неадекватність інформації про фізику задачі, недостатня обумовленість лінеаризації, недостовірність моделей шумів в системі та у вимірюваннях) і накопичення похибок округлення в бортовому комп'ютері (що викликає порушення симетричності й позитивної визначеності матричного розв'язку рівняння Ріккати). Ці причини приводять до швидкого обнуління матричного коефіцієнта K підсилення фільтра, в результаті фільтр перестає реагувати на додаткові вимірювання. Всі спроби позбутись його розбіжності шляхом штучного підвищення інтенсивності шуму в системі або простим обмеженням знизу матриці K приводить, як правило, до втрати ним властивості оптимальності.

Всі ці складнощі іноді змушують на практиці відмовитись від оптимальної фільтрації за Калманом.

Тоді можна, наприклад, звернутись до *адитивних* фільтрів [139–141], однак їх алгоритми надто громіздкі та важкі для реалізації в реальному часі на борту об'єкта.

Можна спробувати застосувати *евристичний* підхід, коли структура нелінійного фільтра задається апріорі, виходячи з евристичних міркувань, а її адекватність вихідному об'єкту перевіряється математичним моделюванням або експериментально [116]. В цьому напрямку необхідно відмітити роботи

[142–144], присвячені *умовно оптимальній* нелінійній фільтрації, в яких для вихідної нелінійної системи

$$\dot{y} = \varphi(y, t) + \psi(y, t)v \quad (5.51)$$

з вектором вимірювань

$$x = \varphi_1(y, t) + \psi_1(y, t)u \quad (5.52)$$

при некорельованих похибках v і u типу центрованого *білого шуму* ставиться задача оцінювання за допомогою нелінійного фільтра

$$\dot{\hat{y}} = \alpha(t)\xi(\hat{y}, t) + \beta(t)\eta(\hat{y}, t) + \gamma(t), \quad (5.53)$$

де функції ξ , η задаються евристично, а α , β , γ знаходяться з умов мінімуму дисперсії похибки оцінки та її першої похідної за часом (відповідно α і β) і з умови незміщеності оцінки (функція γ). На жаль, не для всіх систем подібний фільтр забезпечує мінімум дисперсії похибки оцінки [144–146].

До евристичного напрямку можна також віднести й роботи [147, 148].

В них рівняння нелінійних фільтрів повторюють структуру рівнянь об'єкта, однак містять в собі невизначені мультиплікативні [147] або адитивні параметри [148], які підлягають визначенню з умови мінімізації коваріаційних критеріїв.

У динамічних системах, в яких шуми неможливо описати стохастичними процесами з *відомими детермінованими* характеристиками, ставляться задачі оцінювання в умовах *невизначеності*. Вони можуть реалізовуватись мінімаксними [149, 150] або мінімаксно-стохастичними алгоритмами [135–137, 151, 152, 153] через варіаційні задачі та інтегральні рівняння Фредгольма із застосуванням методів лінійного програмування.

Цікаві також результати еліпсоїдального оцінювання [150] і дослідження систем з обмеженими нормами збурень у вимірюваннях мінімаксними методами з виходом на стратегії теорії ігор [136, 154].

При цьому слід відмітити, що якщо в детермінованому випадку вважаються відомими фізичні характеристики збурень у системі та у вимірюваннях, а в стохастичній постановці вважаються детермінованими їх середні значення та дисперсії, отримані на великому відрізку часу або на

великому ансамблі реалізацій, то в умовах невизначеності про характеристики збурень взагалі нічого певного сказати неможливо. Інакше кажучи, навіть їх усередненні значення і дисперсії виявляються стохастичними величинами з непередбачуваними функціями розподілу ймовірностей. Щоб якось зменшити ступінь цієї невизначеності, всі збурення вважаються, перш за все, обмеженими процесами. При цьому обмежуватися за модулем мажоруючими функціями або константами (схема *бортиків* [153]) можуть як окремі компоненти векторного процесу, так і його норма. Наближена до цієї концепції геометричних обмежень шумів і форма їх інтегральних обмежень [149], коли за підінтегральну функцію використовується аналог норми векторного процесу – позитивно визначена квадратична форма його компонентів. При подібних підходах відома лише границя області можливих змін збурень w і v відповідно в системі та у вимірюваннях. Поведінка ж збурень всередині області залишається довільною.

З метою подальшого зменшення ступеня невизначеності збурень можна використовувати апріорне їх розкладання за деякими базовими функціями ξ_i , $i = \overline{1, p}$, у вигляді

$$w(t) = E(t)\xi(t), \quad v(t) = F(t)\xi(t), \quad (5.54)$$

який описує всі види збурень, де

$$E(t) = \begin{bmatrix} \sin \zeta_1 t \cos \zeta_2 t & \sin \zeta_2 t \sin \zeta_3 t & \cos \zeta_1 t \cos \zeta_3 t \\ \cos \zeta_1 t \cos \zeta_2 t & \sin \zeta_2 t \cos \zeta_3 t & \sin \zeta_1 t \sin \zeta_3 t \\ \sin \zeta_1 t \sin \zeta_2 t & \cos \zeta_2 t \cos \zeta_3 t & \sin \zeta_1 t \cos \zeta_3 t \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} \cos \zeta_1 t \cos \zeta_2 t & \cos \zeta_1 t \sin \zeta_3 t & \cos \zeta_2 t \sin \zeta_1 t \\ \cos \zeta_2 t \sin \zeta_3 t & \cos \zeta_2 t \cos \zeta_3 t & \cos \zeta_3 t \sin \zeta_2 t \\ \cos \zeta_3 t \sin \zeta_1 t & \cos \zeta_1 t \sin \zeta_2 t & \cos \zeta_3 t \cos \zeta_1 t \end{bmatrix}.$$

Дійсно, якщо матриці E , F і компоненти вектора ξ для $\forall t \in T = [t_0, \infty)$ будуть заданими, то в цьому випадку отримаємо *детерміновані* збурення.

Якщо функції ξ_i апріорі відомі, а матриці E , F необхідно визначити [155–157], матимемо *канонічне* представлення збурень. Наприклад, в роботі [158] компоненти матриць E , F вважаються центрованими гаусівськими процесами з відомими дисперсіями. Із стовпчиків матриць E , F послідовно, кожен раз приєднуючи вектор стану вихідної системи, формуються вектори

стану розширених систем і для кожної з них будується свій оптимальний фільтр Калмана. Для систем високого порядку подібний підхід призводить до значних розрахункових затрат. При цьому, базові функції ξ_i можна задавати на множині \mathcal{X} гармонічних функцій, степеневих поліномів, многочленів Лежандра, Чебишева, Ньютона, Лагранжа, відрізків рядів Фур'є, сплайнами будь-якого порядку тощо.

Коли, навпаки, задані матриці E і F , а необхідно ідентифікувати базові функції ξ_i , $i = \overline{1, p}$, то приходимо до *хвильового* представлення шумів [159, 160]. При цьому можливі різні підходи. Ідентифікація базових функцій може здійснюватись експериментально [159], або, як у [160], шляхом використання пошукових алгоритмів на будь-якій підмножині $\xi \in \Phi \subset \mathcal{X}$, коли компоненти матриць E , F вважаються функціями, що повільно змінюються. Можна також визначати базові функції розв'язками системи диференціальних рівнянь [159]

$$\dot{\xi} = C(t)\xi + v(t) \quad (5.55)$$

із заданою матрицею коефіцієнтів $C \in \mathbf{R}_{p \times p}$, причому якщо в (5.55) v подавати у вигляді *білого шуму* фіксованої інтенсивності, то рівняння (5.55) нічим не буде відрізнятись від формуючого фільтра, і вектор ξ базових функцій буде імітувати *кольоровий шум* [110, 111, 113, 125]. Якщо ж $v(t)$ реалізовувати у вигляді імпульсної функції Дірака випадкової інтенсивності, причому сусідні моменти їх появи будуть розділятись деякими фіксованими чи випадковими скінченними інтервалами часу τ_k , $k = \overline{0, \infty}$ (в окремому випадку всі τ_k можуть бути рівними τ), то рівняння (5.54), (5.55) імітатора збурень будуть по суті відрізнятись від рівнянь формуючих фільтрів, хоча за структурою і будуть співпадати з ними (ця відмінність обумовлена лише різним характером примусової функції $v(t)$: в формуючому фільтрі v – це білий шум з відомим середнім значенням і дисперсією, а в імітаторі збурень v – зовсім невизначена функція, середнє значення і дисперсія якої змінюється в часі невідомим, випадковим чином).

Нарешті, варто відмітити ще *два* останніх варіанти:

- ❖ коли необхідно знайти і матриці E , F і вектор ξ базових функцій (розв'язати цю задачу можна, об'єднавши хвильове і канонічне представлення збурень);
- ❖ коли матриці E , F і вектор ξ залишаються невизначеними (розв'язання задачі спостереження в цьому випадку можливе при геометричних або інтегральних обмеженнях як самих збурень, так і їх норм – цей підхід висвітлюється в роботах [135, 136, 149–154]).

Що стосується невизначених *параметричних* збурень в динаміці системи [161, 162], то, як показано в [156, 159], вони вдало можуть бути зведені до зовнішніх збурень w (до інструментальних похибок навігаційних датчиків ШСЗ).

Зупинимось ще на невизначених *початкових* збуреннях. В роботі [163] вони задаються умовою $H_0 x_0 = y_0$, при відомих H_0 , y_0 у вигляді

$$H_0 \times \mathbf{R}_{q \times n}, \quad y_0 \in \mathbf{R}_q, \quad q < n \in \mathbf{N}.$$

Однак більш характерними для них є геометричні обмеження. При цьому задача, як правило, зводиться до детермінованого за початковими умовами варіанту, причому за початкові збурення вектора стану використовуються мажоранти модулів його невизначених компонентів у момент часу $t = t_0$.

Отже, в нелінійних задачах спостереження і фільтрації *випадкових* параметрів можна виділити декілька основних напрямків [108, 109], які досить детально розглянуті в [110].

В тих динамічних системах, в яких шуми неможливо описати стохастичними процесами з відомими детермінованими характеристиками, задачі оцінки в умовах *невизначеності* реалізуються мінімаксними [149] або мінімаксно-стохастичними алгоритмами [135, 151, 152].

Для задач спостереження (особливо нелінійних) в умовах невизначеності, окрім обмеженої норми [149], можливе також хвильове [159] і канонічне [157] представлення збурень у системі і похибок у спостереженнях.

Однак, і у випадку геометричних обмежень шумів, і при їх хвильовому представленні синтез спостерігачів стану нелінійних систем можна здійснити за

аналогією з лінійними спостерігачами Люенбергера [24], виходячи з умови асимптотичної стійкості розв'язку рівнянь похибок спостереження.

5.11. Стабілізація процедури спостереження нелінійних динамічних систем

Розглянемо n -вимірну систему нелінійних нестационарних рівнянь похибок динамічного об'єкта

$$\dot{x} = f(x, t) + w(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.56)$$

з достатньо малим нестационарним вектором постійно діючих збурень $\|w(t)\| < \varepsilon = \text{const} > 0$, $t \in T = (t_0, \infty)$, і m -вимірним вектором нелінійних вимірювань

$$y = \varphi(x, t) + v(t) \quad (5.57)$$

вектора стану x системи (5.56) з вектором адитивних похибок $v(t)$, аналогічним $w(t)$, так що $\|v(t)\| < \delta = \text{const} > 0$, причому ε , δ можна вважати величинами одного порядку малості.

Відомо, що при точно визначених початкових умовах і відсутності збурень найкращим спостерігачем системи (5.56) буде сама система (5.56) [164].

Під дією збурень для забезпечення стійкості спостерігача (5.56) необхідно ввести в нього керування за нев'язкою оцінки $\tilde{y} = y - \varphi(\hat{x}, t)$ вектора вимірювань y з (5.57). Тоді замість (5.56) отримаємо

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t) + K[y(t) - \varphi(\hat{x}, t)], \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0. \quad (5.58)$$

де $\varphi(\hat{x}, t)$ – оцінка вектора y .

Порівнюючи (5.56) та (5.58), можна впевнитись, що при синтезі спостерігача (5.58) невідомі збурення w у вихідній системі (5.56) замінюються помилкою оцінки вектора вимірювань \tilde{y} з матричним коефіцієнтом підсилення K , так що формально можна прийняти

$$w = K\tilde{y}. \quad (5.59)$$

Структуру спостерігача (5.58) можна обумовити і дещо інакше.

Нехай збурення w і v детерміновані та відомі. Тоді коефіцієнт підсилення фільтра K підберемо таким чином, щоб виконувалось співвідношення [80]

$$w = Kv. \quad (5.60)$$

В результаті рівняння спостерігача отримаємо з (5.56), враховуючи (5.57) і (5.60), у вигляді

$$\dot{x} = f(x, t) + K[y(t) - \varphi(x, t)], \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.61)$$

Щоб надалі розв'язок x системи спостереження (5.61) відрізнити від розв'язку x системи (5.56), шукану змінну в (5.61) традиційно позначимо як \hat{x} . При цьому рівняння (5.61) тотожно співпадає з (5.58).

В рівнянні спостерігача (5.58) немає величин, яких принципово не можна ідентифікувати, і воно, на відміну від (5.56), інтегрується до кінця. Тим самим задача спостереження зводиться до пошуку в (5.58) матриці K , яка задовольняє умови (5.59) чи (5.60). На жаль обидва ці співвідношення неконструктивні, тому матричний коефіцієнт K будемо синтезувати іншим способом.

Для цього визначимо вектор e похибок спостереження у вигляді

$$e = x - \hat{x} \quad (5.62)$$

і далі, щоб отримати рівняння похибок спостерігача віднімемо від рівняння (5.56) рівняння спостерігача (5.58).

Враховуючи (5.57), (5.60), будемо мати

$$\dot{e} = a(e, \hat{x}, t) - Kh(e, \hat{x}, t) + \gamma(t), \quad (5.63)$$

де позначено $a(e, \hat{x}, t) = f(\hat{x} + e, t) - f(\hat{x}, t)$; $h(e, \hat{x}, t) = \varphi(\hat{x} + e, t) - \varphi(\hat{x}, t)$ і відповідно $\gamma(t) = w - Kv$ – нев'язка співвідношення (5.60).

Якщо вектор-функції a і h мають обмежені частинні похідні за всіма компонентам вектора e , так що для них можлива побудова відповідних якобіанів, то за відомою методикою [23] нелінійне рівняння (5.63) легко представляється в псевдолінійній формі

$$\dot{e} = [A(e, \hat{x}, t) - KH(e, \hat{x}, t)]e + \gamma(t), \quad e(t_0) = e_0. \quad (5.64)$$

Розглядаючи далі в рівнянні (5.64) \hat{x} як параметр, можна ставити задачу синтезу матриці K , яка забезпечує рівномірну по e_0 , t_0 асимптотичну стійкість розв'язків однорідної системи

$$\dot{e} = [A(e, \hat{x}, t) - KH(e, \hat{x}, t)]e, \quad e(t_0) = e_0, \quad (5.65)$$

що відповідає (5.64). З цією метою можна використовувати, наприклад, будь-який з методів ЖС НСС.

Теорема [29]. Якщо тривіальний розв'язок системи (5.65) асимптотично стійкий за Ляпуновим і для цієї системи існує позитивно-визначена функція $V(t, x)$, яка допускає нескінченно малу вищу границю та повна похідна якої за часом є функція негативно-визначена, то цей розв'язок стійкий при постійно діючих збуреннях.

Згідно цій теоремі при виконанні умов (2.21), (2.22) система (5.64) буде стійкою.

Побудовану матрицю $K = K(e, \hat{x}, t)$ треба підставити в рівняння спостерігача (5.58), а щоб замкнути систему спостереження, необхідно розглядати спільну систему рівнянь (5.58), (5.65).

Методи ЖС дозволяють однаково успішно синтезувати як матрицю $H \in \mathbf{R}_{m \times n}$ при заданих матрицях $A \in \mathbf{R}_{n \times n}$ і $K \in \mathbf{R}_{n \times m}$ в замкнутій системі (5.65) (розв'язуючи задачу стабілізації нелінійних систем), так і матрицю K при заданих матрицях A і H (задача спостереження).

5.12. Розв'язання задачі стабілізації спостерігачів стану нелінійних систем шостим алгоритмом ПЖС НСС

Скористаємось рівнянням Ляпунова, записаним для системи (5.65) у випадку стаціонарної функції Ляпунова. Будемо мати

$$D(A - KH) + (A - KH)^T D = -DQD. \quad (5.66)$$

Коли матриця H неособлива і має обернену, розв'язок задачі стабілізації спостерігача здійснюється методом кососиметризації (2.34)–(2.36) рівняння Ляпунова (5.66). Тоді отримаємо

$$K = [A + \frac{1}{2}(Q + S)D]H^{-1}. \quad (5.67)$$

Якщо ж за аналогією з (3.6) матриця H має блочне представлення

$$H = [H_1, H_2], \quad (5.68)$$

причому $H : \{H_1, H_2 / H_1 \in \mathbf{R}_{v \times j}, H_2 \in \mathbf{R}_{v \times v}, \text{rang } H = \text{rang } H_2 = v \leq n \forall n, v; j = n - v \in \mathbf{N}, \exists H_2^{-1}\}$,

тоді її структура (5.68) обумовить розмір блоків у матрицях D вигляду (3.7), (3.10) (відповідно нижньої та верхньої), Q у вигляді нижньої (3.12) і верхньої (3.14), блочне розбиття матриці A вигляду (3.6a) та матриці K у вигляді

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

де $\{D_{11}, Q_{11}, A_{11}\} \in \mathbf{R}_{j \times j}$, $\{D_{12}, Q_{12}, A_{12}, K_1\} \in \mathbf{R}_{j \times v}$, $A_{21} \in \mathbf{R}_{v \times j}$, $\{Q_{22}, A_{22}, K_2\} \in \mathbf{R}_{v \times v}$.

Для такого блочного представлення матриць A, K, H та *нижніх* матриць D, Q матимемо рівняння Ляпунова, аналогічні (3.15), а саме

$$D_{11}({}^1A_{11} - {}^1K_1 H_1) + ({}^1A_{11} - {}^1K_1 H_1)^T D_{11} = -D_{11} Q_{11} D_{11}, \quad (5.70a)$$

$$D_{22}({}^1A_{22} - K_2 H_*) + ({}^1A_{22} - K_2 H_*)^T D_{22} = -D_{22} Q_{22} D_{22}, \quad (5.70б)$$

$$D_{11}[({}^1A_{12} - {}^1K_1 H_2) - ({}^1A_{11} - {}^1K_1 H_1) D_{12}] + (A_{21} - K_2 H_1)^T D_{22} = 0, \quad (5.70в)$$

в яких для зручності позначено

$$\begin{aligned} {}^1A_{11} &= A_{11} + D_{12} A_{21}, \quad {}^1A_{12} = A_{12} + D_{12} A_{22}, \quad {}^1A_{22} = A_{22} - A_{21} D_{12}, \\ {}^1K_1 &= K_1 + D_{12} K_2, \quad H_* = H_2 - H_1 D_{12}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Використовуючи шостий алгоритм ПЖС НСС, знайдемо в явному вигляді K_1 з рівняння (5.70в), K_2 з рівняння (5.70б), а рівність (5.70a) після виключення в ній K_1, K_2 стане умовою стабілізованості.

Застосуємо до рівняння (5.70б) метод кососиметризації і отримаємо вираз

$$K_2 = [{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1}. \quad (5.72)$$

В ньому згідно з умовою (5.68) та відповідним виразом (5.71) можна з використанням матриці D_{12} забезпечити існування оберненої матриці до H_* .

Підставимо його в рівняння (5.70в) і визначимо K_1 в явному вигляді.

Отримаємо

$$K_1 = [{}^1\hat{A}_{12} - \frac{1}{2}({}^1D_{12}Q_{22} + \hat{D}_{12}S_{22})D_{22}]H_*^{-1}. \quad (5.73)$$

У рівності (5.73) позначено

$$\begin{aligned} {}^1\hat{A}_{12} &= A_{12} - A_{11} D_{12} + (A_{21} - A_{22} \hat{H}_*)^T D_{22}, \\ {}^1D_{12} &= (D_{12} + D_{11}^{-1} \hat{H}_*^T D_{22}), \quad \hat{D}_{12} = (D_{12} - D_{11}^{-1} \hat{H}_*^T D_{22}) \quad \hat{H}_* = H_*^{-1} H_1. \end{aligned}$$

Якщо виключити K_1 з рівняння (5.70a), умова стабілізованості набуде вигляду

$$D_{11}({}^1A_{11} - \hat{H}_* {}^1\hat{A}_{21}) + ({}^1A_{11} - \hat{H}_* {}^1\hat{A}_{21})^T D_{11} = -D_{11}(Q_{11} + \hat{H}_* Q_{22} \hat{H}_*^T) D_{11}, \quad (5.74)$$

Для блочного представлення матриць A, K, H та *верхніх* матриць D, Q матимемо рівняння Ляпунова у вигляді

$$D_{11}[\tilde{A}_{11} - K_1 \tilde{H}] + [\tilde{A}_{11} - K_1 \tilde{H}]^T D_{11} = -D_{11} Q_{11} D_{11}, \quad (5.75a)$$

$$D_{22}(\tilde{A}_{22} - \tilde{K}_2 H_2) + (\tilde{A}_{22} - \tilde{K}_2 H_2)^T D_{22} = -D_{22} Q_{22} D_{22}, \quad (5.75б)$$

$$D_{22}[\tilde{A}_{21} + D_{21} \tilde{A}_{11} - \tilde{K}_2 \tilde{H}] + (A_{12} - K_1 H_2)^T D_{11} = 0. \quad (5.75в)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= A_{11} - A_{12} D_{21}, & \tilde{A}_{21} &= A_{21} - A_{22} D_{21}, & \tilde{A}_{22} &= A_{22} + D_{21} A_{12}, \\ \tilde{K}_2 &= K_2 + D_{21} K_1, & \tilde{H} &= H_1 - H_2 D_{21}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Використовуючи процедуру кососиметризації, з рівняння (5.75б) отримаємо

$$\tilde{K}_2 = [\tilde{A}_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_2^{-1}. \quad (5.77)$$

Виключимо \tilde{K}_2 в рівнянні (5.75в) та отримаємо K_1 в явному вигляді

$$K_1 = A_{12} H_2^{-1} + D_{11}^{-1} [\tilde{A}_{21}^T + \tilde{A}_{11}^T D_{21}^T - \tilde{H}_*^T \tilde{A}_{22}^T - \frac{1}{2} \tilde{H}_*^T D_{22} (Q_{22} - S_{22})] H_2^{-1}, \quad (5.78)$$

а врахувавши відповідну рівність з (5.76) і вирази (5.77), (5.78), будемо мати

$$K_2 = [\tilde{A}_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_2^{-1} - D_{21} K_1, \quad \tilde{H}_* = H_2^{-1} \tilde{H}. \quad (5.79)$$

Виключимо матрицю K_1 з (5.75a), враховуючи її вирази (5.78). В результаті отримаємо таку умову стабілізованості:

$$\begin{aligned} D_{11} \{ \tilde{A}_{11} - [\hat{A}_{21} + \tilde{A}_{22} D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22} D_{21} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22})\tilde{H}_*^T D_{11}] \tilde{H}_* \} + \\ + \{ \tilde{A}_{11} - [\hat{A}_{21} + \tilde{A}_{22} D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22} D_{21} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22})\tilde{H}_*^T D_{11}] \tilde{H}_* \}^T D_{11} = -D_{11} Q_{11} D_{11} \end{aligned} \quad (5.80)$$

В результаті, рівняння (5.58) буде рівномірно асимптотично стійким (експоненціально стійким) спостерігачем вектора стану нелінійної системи (5.51) з нелінійними вимірюваннями (5.52) і невизначеними перешкодами w і v , якщо блоки матриці K в (5.58) будуть задаватись виразами (5.72) та (5.73) для *нижніх* матриць D, Q , і відповідно (5.78), (5.79) для *верхніх* матриць D, Q .

Проаналізуємо умову стабілізованості з нижньою матрицею коефіцієнтів

D. Якщо позначити

$$\Upsilon = D_{11}({}^1A_{11} - \hat{H}_* {}^1\hat{A}_{21}) + ({}^1A_{11} - \hat{H}_* {}^1\hat{A}_{21})^T D_{11}, \quad (5.81)$$

то умова стабілізованості (5.74) зведеться до умов Сильвестра додатної визначеності матриці Υ . Матимемо

$$\Delta_j(\Upsilon) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, k_1}, \quad k_1 = n - m, \quad (5.82)$$

де Δ_j – головні діагональні мінори j -го порядку матриці Υ ; $\gamma_j > 0$ – деякі позитивно визначені функції.

Щоб забезпечити умови (5.82), скористаємось нелінійною схемою компромісів

$$J_s(x, \mathbf{G}) = \sum_{j=1}^l \frac{\gamma_j}{\Delta_j(\Upsilon) - \gamma_j} \rightarrow \min_{\mathbf{G}} \quad (5.83)$$

з її реалізацією шляхом мінімізації нелінійної функції $J(x, \mathbf{G})$ на множині $\mathbf{G} = \{d_{ij}, q_{ij}, s_{ij}\}$ компонентів відповідних блоків матриць D, Q, S .

Проаналізуємо умову стабілізованості з верхньою матрицею коефіцієнтів D , для цього позначимо ліву частину рівняння (5.80) через матрицю $\hat{\Upsilon}$:

$$\hat{\Upsilon} = D_{11} \{ \tilde{A}_{11} - [\hat{A}_{21} + \tilde{A}_{22} D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}D_{21} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22})\tilde{H}_*^T D_{11}] \tilde{H}_* \} + \{ \tilde{A}_{11} - [\hat{A}_{21} + \tilde{A}_{22} D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}D_{21} - \frac{1}{2}(Q_{22} - S_{22})\tilde{H}_*^T D_{11}] \tilde{H}_* \}^T D_{11}. \quad (5.84)$$

Умови позитивної визначеності цієї матриці зададуться нерівностями

$$\Delta_j(\hat{\Upsilon}) > \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, k_1}, \quad k_1 = n - m, \quad (5.85)$$

аналогічними (5.82), які можна забезпечити за аналогією з (5.83) мінімізацією скалярної функції $J_t(x, \mathbf{G})$ на множині \mathbf{G} у вигляді

$$J_t(x, \mathbf{G}) = \sum_{j=1}^l \frac{\gamma_j}{\Delta_j(\hat{\Upsilon}) - \gamma_j} \rightarrow \min_{\mathbf{G}}. \quad (5.86)$$

5.13. Магнітометрична система визначення параметрів сферичного руху космічного апарата

Із публікацій [165–170] відома можливість оцінки параметрів сферичного руху КА за показаннями магнітометрів при умові завдання координат місцезнаходження об'єкта. Можливості визначення швидкості руху супутника шляхом обробки магнітометричної інформації пов'язуються в літературі здебільшого з використанням модуля вектора напруженості магнітного поля

[171]. При цьому спочатку знаходяться координати місцезнаходження об'єкта як розв'язок допоміжної задачі (із застосуванням методів інерціальної навігації, зокрема, шляхом розгляду гвинтового руху КА [156]), а потім розв'язується основна задача – оцінка параметрів його сферичного руху (орієнтації). При її розв'язанні вводиться допустиме спрощуючи припущення про рух супутника по незмінній круговій орбіті.

Далі формуються методика і алгоритми оцінки, які дозволяють визначити параметри сферичного руху супутника при довільній невизначеності його початкової орієнтації та широкому діапазоні невизначеності координат початкової кутової швидкості. Ці оцінки необхідні для реалізації стабілізуючого управління ШСЗ, синтезованого в цьому розділі, яке забезпечує його орієнтацію і стабілізацію за допомогою маховиків з використанням одержаних оцінок параметрів руху.

Нехай на об'єкті знаходиться модель геомагнітного поля. З допомогою трикомпонентного магнітометра, встановленого на КА, вимірюються проєкції вектора напруженості h геомагнітного поля (або вектора магнітної індукції B) на осі зв'язаної системи координат z . Одночасно за координатами місцезнаходження КА, які вважаються відомими, знаходяться відображення вектора h або B на орбітальний базис η , які треба перепроєктувати на зв'язані осі.

Далі при розв'язанні задачі спостереження стану ШСЗ буде використовуватись інформація про вектор h .

Застосуємо спрощену модель геомагнітного поля «прямий диполь» [172]

$$h_{\eta_1} = \alpha \sin i \cos \varpi, \quad h_{\eta_2} = \alpha \cos i, \quad h_{\eta_3} = -2\alpha \sin i \sin \varpi, \quad (5.87)$$

де $\alpha = m_e / r^3$ ($m_e = 8,1 \cdot 10^{22} \text{ а} \cdot \text{м}^2$ – магнітний момент Землі, r – радіус орбіти); i – нахил орбіти (кут між площиною екватора і площиною орбіти); ϖ – аргумент широти місця знаходження КА (кут між напрямом із центра Землі на висхідний вузол орбіти і радіус-вектором КА відносно центра Землі). Коли орбіта кругова, то $\dot{\varpi} = \omega_0$.

5.14. Спостереження стану штучного супутника Землі

Розглянемо рівняння (5.7) руху ШСЗ у відхиленнях, яке з урахуванням виразів (5.8), (5.10) можна представити у вигляді

$$\dot{x} = \frac{1}{2} A(\omega_s, \omega_\eta) x - \frac{1}{2} M(\lambda_s, \hat{x}) C(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, \hat{x}) \hat{x}, \quad (5.88)$$

де в регуляторі, враховуючи також (5.15), використовується оцінка \hat{x} вектора стану x замість вектора x у класичній постановці задачі керування.

Друге рівняння ШСЗ у відхиленнях, з урахуванням маховиків, будемо мати з (5.33), (5.35). Використовуючи оцінку \hat{y} в регуляторі (5.35) замість y з (5.28), отримаємо рівняння

$$\dot{y} = A_1(\omega_s, y) y - J_*^{-1} C_1(\omega_s, \hat{y}) \hat{y} + J_*^{-1} M_*, \quad (5.89)$$

в якому на відміну від (5.23) врахований постійно діючий на ШСЗ сумарний збурюючий момент від гравітаційного геополя та інших зовнішніх факторів, причому будемо вважати, що

$$\|M_*\| < \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (5.90)$$

Для рівнянь (5.88), (5.89) згідно з (5.58) рівняння спостерігача можна записати у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = \frac{1}{2} [A(\omega_s, \omega_\eta) - M(\lambda_s, \hat{x}) C(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, \hat{x})] \hat{x} + K_x (\beta_h - H_x \hat{x}) \quad (5.91)$$

і відповідно

$$\dot{\hat{y}} = [A_1(\omega_s, \hat{y}) - J_*^{-1} C_1(\omega_s, \hat{y})] \hat{y} + J_*^{-1} M_* + K_y (\beta_\omega - \hat{y}). \quad (5.92)$$

Для них необхідно побудувати вектор вимірювань.

На борту ШСЗ із спеціальних трикомпонентних датчиків (магнітометра і датчика кутової швидкості – ДКШ) отримуються проекції на осі зв'язаної системи координат z двох векторів: вектора напруженості h геомагнітного поля і вектора ω абсолютної кутової швидкості КА.

Оскільки вважається, що для кожної точки орбіти ШСЗ відомі з відповідної таблиці значення проекцій вектора h на осі орбітального базису η , то вектор β_h вимірювань магнітометричної інформації можна сформулювати за правилом

$$h_t - h_m = \beta_h = (h_0 + \delta h_z) - (h_0 + \Delta h_m) = \delta A_\lambda h_\eta - \Delta h_m. \quad (5.93)$$

Тут h_t , h_m і h_0 – відповідно табличне, магнітометричне і точне значення вектора h ; h_η – табличне значення h з (5.87); Δh_m – невизначені похибки магнітометра, причому вважатимемо, що

$$\|\Delta h_m\| < \delta_1 = const > 0. \quad (5.94)$$

Перетворивши вектор $\delta A_\lambda h_t = \varphi_t(\lambda_s, h_\eta, x)$ через матрицю Якобі у псевдолінійну форму, остаточно будемо мати

$$h_t - h_m = \beta_h = H_x(\lambda_s, h_\eta, x)x - \Delta h_m. \quad (5.95)$$

Тут величини $h_{\eta j}$, $j = \overline{1,3}$, задаються формулами (5.87).

Стосовно кутової швидкості можна, враховуючи вираз (5.28), побудувати такий вектор вимірювань:

$$\omega_o - \omega_s = \beta_\omega = (\omega_s + y + \Delta\omega) - \omega_s = y + \Delta\omega, \quad (5.96)$$

В ньому ω_o – інформація, що знімається з ДКШ, а через $\Delta\omega$ позначено вектор похибок ДКШ, для якого за аналогією з (5.94) будемо мати

$$\|\Delta\omega\| < \delta_2 = const > 0. \quad (5.97)$$

Надалі ε в (5.90) і δ_1, δ_2 в (5.94), (5.97) можна вважати малими величинами одного порядку, а M_* і $\Delta h_m, \Delta\omega$ – моделювати виразами (5.54), (5.55).

Тут слід зазначити, що як доведено в [156], усі координати ШСЗ (при будь-яких реальних значеннях його нерівних між собою моментів інерції та при його русі по круговій орбіті) добре спостережені навіть при одній тільки магнітометричній інформації із застосуванням спрощеної моделі геомагнітного поля „прямий диполь” у вигляді (5.87). У задачі, що розглядається, повний вектор вимірювань (5.95), (5.96) будується як за магнітометричною (з магнітометра), так і за швидкісною (з ДКШ) інформацією, тому ШСЗ і поготів буде *добре спостереженим*.

Рівняння похибок спостереження знайдемо як різницю рівнянь (5.88), (5.89) та (5.91), (5.92). Будемо мати

$$\dot{e}_x = \left[\frac{1}{2} A(\omega_s, \omega_\eta) - K_x H_x \right] e_x + K_x \Delta h_m, \quad (5.98)$$

$$\dot{e}_y = (A_y - K_y) e_y + (J_*^{-1} M_* - K_y \Delta \omega), \quad (5.99)$$

якщо задати похибки спостереження e_x, e_y рівностями

$$e_x = x - \hat{x}, \quad e_y = y - \hat{y}, \quad (5.100)$$

та вважати $K_x \Delta h_m, J_*^{-1} M_* - K_y \Delta \omega$ згідно з (5.60), (5.90), (5.94), (5.97) малими величинами досить високого порядку.

Крім того в (5.99) позначено

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & (J_{21} - J_{31})(\omega_{s3} + \hat{y}_3) + J_{21} e_3 & (J_{21} - J_{31})(\omega_{s2} + \hat{y}_2) - J_{31} e_2 \\ (J_{32} - J_{12})(\omega_{s3} + \hat{y}_3) - J_{12} e_3 & 0 & (J_{32} - J_{12})(\omega_{s1} + \hat{y}_1) + J_{32} e_1 \\ (J_{13} - J_{23})(\omega_{s2} + \hat{y}_2) + J_{13} e_2 & (J_{13} - J_{23})(\omega_{s1} + \hat{y}_1) - J_{23} e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

Однорідні рівняння, що відповідають (5.98), (5.99), матимуть вигляд

$$\dot{e}_x = \left[\frac{1}{2} A(\omega_s, \omega_\eta) - K_x H_x \right] e_x, \quad (5.102)$$

$$\dot{e}_y = (A_y - K_y) e_y. \quad (5.103)$$

Запишемо для системи (5.103) рівняння Ляпунова у вигляді

$$D_2 (A_y - K_y) + (A_y - K_y)^T D_2 = -2 D_2 Q_2 D_2 \quad (5.104)$$

і розв'яжемо його методом кососиметризації (2.34)–(2.36). Тоді отримаємо

$$K_y = [A_y + (Q_2 + S_2) D_2]. \quad (5.105)$$

Тут D_2, Q_2 – жорстко структуровані матриці за процедурою (3.7), (3.12), причому матриця D_2 , якщо не розглядається задача оптимізації стабілізуючого керування, може бути прийнята одиничною третього порядку: $D_2 = I_3$. Через S_2 позначена довільна кососиметрична матриця третього порядку. Тоді вираз (5.105) прийме остаточний вигляд

$$K_y = A_y + Q_2 + S_2. \quad (5.106)$$

Для рівняння (5.102) за аналогією з (5.68) матриця H_x має блочне представлення

$$H_x = [h_1, H_2], \quad (5.107)$$

причому $H_x : \{h_1, H_2 / h_1 \in \mathbf{R}_{3 \times 1}, H_2 \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \text{rang } H_2 = 3, \exists H_2^{-1}\}$,

$$h_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{s_3} h_{\eta_2} - \lambda_{s_2} h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_4 h_{\eta_2} - \frac{4}{3} x_3 h_{\eta_3} \\ -\lambda_{s_3} h_{\eta_1} + \lambda_{s_1} h_{\eta_3} - \frac{4}{3} x_4 h_{\eta_1} + \frac{4}{3} x_2 h_{\eta_3} \\ \lambda_{s_1} h_{\eta_1} - \lambda_{s_1} h_{\eta_2} + \frac{4}{3} x_3 h_{\eta_1} - \frac{4}{3} x_2 h_{\eta_2} \end{bmatrix}; \quad (5.108)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{s_2} h_{\eta_2} + \lambda_{s_3} h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_3 h_{\eta_2} + \frac{4}{3} x_4 h_{\eta_3}, & -\frac{4}{3} x_3 h_{\eta_2} - 2\lambda_{s_2} h_{\eta_2} + \lambda_{s_1} h_{\eta_2} - & -\frac{4}{3} x_4 h_{\eta_2} - 2\lambda_{s_3} h_{\eta_2} + \lambda_{s_0} h_{\eta_2} + \\ & -\lambda_{s_0} h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_2 h_{\eta_2} - \frac{4}{3} x_1 h_{\eta_3}, & +\lambda_{s_1} h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_1 h_{\eta_2} + \frac{4}{3} x_2 h_{\eta_3}, \\ \lambda_{s_2} h_{\eta_1} - 2\lambda_{s_1} h_{\eta_2} + \lambda_{s_0} h_{\eta_3} - & \lambda_{s_1} h_{\eta_1} + \lambda_{s_3} h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_2 h_{\eta_1} + \frac{4}{3} x_4 h_{\eta_3}, & -\lambda_{s_0} h_{\eta_1} - 2\lambda_{s_3} h_{\eta_2} + \lambda_{s_2} h_{\eta_3} - \\ -\frac{4}{3} x_2 h_{\eta_2} + \frac{4}{3} x_3 h_{\eta_1} + \frac{4}{3} x_1 h_{\eta_3}, & & -\frac{4}{3} x_4 h_{\eta_2} - \frac{4}{3} x_1 h_{\eta_1} + \frac{4}{3} x_3 h_{\eta_3}, \\ -\frac{4}{3} x_2 h_{\eta_3} + \lambda_{s_3} h_{\eta_1} - \lambda_{s_0} h_{\eta_2} - & \lambda_{s_0} h_{\eta_1} + \lambda_{s_3} h_{\eta_2} - 2\lambda_{s_2} h_{\eta_3} - & \\ -2\lambda_{s_1} h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_4 h_{\eta_1} - \frac{4}{3} x_1 h_{\eta_2}, & -\frac{4}{3} x_3 h_{\eta_3} + \frac{4}{3} x_1 h_{\eta_1} + \frac{4}{3} x_4 h_{\eta_2}, & \lambda_{s_1} h_{\eta_1} + \lambda_{s_2} h_{\eta_2} + \frac{4}{3} x_2 h_{\eta_1} + \frac{4}{3} x_3 h_{\eta_2} \end{bmatrix}.$$

Її структура (5.107) обумовить розмір блоків в нижніх матрицях D , Q у вигляді (3.7), (3.13), а саме

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{12}^T & d_{12}^T d_{12} + D_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{11} d_{12} \\ q_{11} d_{12}^T & q_{11} d_{12}^T d_{12} + 2D_{22} Q_{22} D_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.109)$$

і відповідне блочне розбиття матриць A та K_x :

$$A(\omega_s, \omega_\eta) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}, \quad K_x = \begin{bmatrix} k_1 \\ K_2 \end{bmatrix}, \quad (5.110)$$

де $\{d_{11}, q_{11}, a_{11}\} \in \mathbf{R}_{1 \times 1}$, $\{d_{12}, q_{12}, a_{12}, k_1\} \in \mathbf{R}_{1 \times 3}$, $a_{21} \in \mathbf{R}_{3 \times 1}$, $\{D_{22}, Q_{22}, A_{22}, K_2\} \in \mathbf{R}_{3 \times 3}$.

Для такого блочного представлення матриць A , K , H і D , Q матимемо рівняння Ляпунова, аналогічні (5.70),

$$2({}^1 a_{11} - {}^1 k_1 h_1) = -q_{11}, \quad (5.111a)$$

$$D_{22} ({}^1 A_{22} - K_2 H_*) + ({}^1 A_{22} - K_2 H_*)^T D_{22} = -D_{22} Q_{22} D_{22}, \quad (5.111б)$$

$${}^1 a_{12} - {}^1 k_1 H_2 - ({}^1 a_{11} - {}^1 k_1 h_1) d_{12} + (a_{21} - K_2 h_1)^T D_{22} = 0, \quad (5.111в)$$

причому

$${}^1 a_{11} = a_{11} + d_{12} a_{21}, \quad {}^1 a_{12} = a_{12} + d_{12} A_{22}, \quad {}^1 A_{22} = A_{22} - a_{21} d_{12}, \quad {}^1 k_1 = k_1 + d_{12} K_2, \quad H_* = H_2 - h_1 d_{12}. \quad (5.112)$$

Знайдемо в явному вигляді K_2 з рівняння (5.111б), застосовуючи до нього процедуру кососиметризації (2.34) – (2.36). В результаті матимемо з урахуванням (5.112)

$$K_2 = [{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1}. \quad (5.113)$$

Що стосується k_1 , то його зручніше знайти із скалярного рівняння (5.111а). Тоді, враховуючи відповідне співвідношення (5.112) та (5.113), будемо мати

$$k_1 = ({}^1a_{11} + \frac{1}{2}q_{11})h_1^+ - d_{12}[{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1}. \quad (5.114)$$

Тут, крім вже відмічених позначень,

$$h_1^+ = (h_1^T h_1)^{-1} h_1^T.$$

Рівність (5.111в) після виключення в ній 1k_1 , K_2 стане умовою стабілізованості

$${}^1a_{12} - {}^1a_{11}h_1^+H_2 + \frac{1}{2}(d_{12} - h_1^+H_2)q_{11} + \{a_{21} - [{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1}h_1\}^T D_{22} = 0, \quad (5.115)$$

яку неважко задовольнити, скориставшись нелінійною схемою компромісів (5.83) щодо відповідної допоміжної матриці, яка отримується з рівності (5.115).

Отже матриця K_x , враховуючи вирази (5.114), (5.113), набуде вигляду

$$K_x = \begin{bmatrix} ({}^1a_{11} + \frac{1}{2}q_{11})h_1^+ - d_{12}[{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1} \\ [{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.116)$$

Щоб отримати похибку спостереження вектора стану ШСЗ, необхідно вираз (5.116) підставити в (5.98), а вираз (5.106) – у (5.99). Рівняння (5.98) при цьому не зміниться, в ньому тільки треба буде враховувати співвідношення (5.116), а рівняння (5.99) прийме форму

$$\dot{e}_y = -(Q_2 + S_2)e_y + (J_*^{-1}M_* - K_y\Delta\omega). \quad (5.117)$$

Тут у загальному випадку $\Delta h_m(t) = G(t)\xi(t)$, $\Delta\omega(t) = P(t)\xi(t)$ і можна прийняти $M_* = const$ [91, 100].

Щоб отримати оцінку вектора стану ШСЗ із спостережника, треба вирази (5.116) і (5.106) підставити в рівняння (5.91), (5.92). В результаті рівняння спостережника за вектором x отримаємо з (5.91), зважаючи на (5.93), (5.15), у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = -\frac{1}{2}(Q + S + 2K_x H_x)\hat{x} + K_x\beta_h \quad (5.118)$$

з K_x, H_x , що описуються формулами (5.107), (5.110), а для вектора y , маючи на увазі (5.92), (5.96), (5.39) і (5.106) – відповідно

$$\dot{\hat{y}} = -[A_y + Q_2 + S_2 + (Q_1 + S_1)D_1]\hat{y} + J_*^{-1}M_* + (A_y + Q_2 + S_2)\beta_\omega. \quad (5.119)$$

Далі треба промоделювати рівняння (5.98), (5.117), (5.118), (5.119) і (5.88), (5.89), щоб оцінити якість розв'язання задачі стабілізації супутника.

5.15. Функціонування САПР стабілізації спостерігача стану штучного супутника Землі

З бази даних спостережника (див. рис.1.4) обрано математичну модель виду (5.88) та (5.89).

Використовується метод кососиметризації як для знаходження K_y з рівняння (5.104), так і для знаходження K_2 з рівняння (5.111б).

Заповнюється структура стабілізуючого регулятора з бази даних САПР, враховуючи вирази (5.114), (5.113). В результаті отримується формула

$$K_x = \begin{bmatrix} ({}^1a_{11} + \frac{1}{2}q_{11})h_1^+ - d_{12}[{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1} \\ [{}^1A_{22} + \frac{1}{2}(Q_{22} + S_{22})D_{22}]H_*^{-1} \end{bmatrix}.$$

Оскільки в даному розділі не проводиться оптимізація стабілізуючого регулятора спостерігача стану ШСЗ, то відповідно блоку параметричної оптимізації спостережника в структурі САПР ШСЗ немає.

Після виконання *стабілізації спостережника* маємо рівності (5.118) та (5.119), а також похибку спостереження у вигляді

$$\dot{e}_y = -(Q_2 + S_2)e_y + (J_*^{-1}M_* - K_y\Delta\omega)$$

5.16. Математичне моделювання похибок спостереження стану штучного супутника Землі

Промодельюємо рівняння (5.98) методом Рунге-Кутта в середовищі *MatLab* за початкових умов $e_x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, значеннях коефіцієнтів $J_1 = 30$, $J_2 = 35$, $J_3 = 40$; $d_{11} = 0,5$, $d_4 = 0,7$, $d_{22} = 0,9$; $q_{11} = 5$, $q_2 = 7$, $q_{22} = 9$ та похибках магнітометра $\Delta h_m = [0,01 \ 0,012 \ 0,014 \ 0,016]$. Результати моделювання представлені на рис. 5.10.

Аналогічно промодельюємо рівняння (5.117) при нульових початкових умовах $e_y(0) = [0 \ 0 \ 0]$, значеннях коефіцієнтів $J_1 = 30$, $J_2 = 35$, $J_3 = 40$;

$d_{11} = 0,5, d_4 = 0,7, d_{22} = 0,9; \quad q_{11} = 5, q_2 = 7, q_{22} = 9$ та похибках ДКШ $\Delta\omega = -[0,06 \ 0,07 \ 0,08], M_* = [0 \ 0 \ 0,04]$. У результаті отримуємо рис. 5.11.

Результати моделювання рівняння спостережника за вектором x (5.118) при початкових умовах $\hat{x}(0) = [0,1; 0,1; 0,1; 0,1]$, заданих кутових швидкостях $\omega_{s1} = -0,01, \omega_{s2} = -0,02, \omega_{s3} = -0,03$, значеннях коефіцієнтів $J_1 = 30, J_2 = 35, J_3 = 40; d_{11} = 0,5, d_4 = 0,7, d_{22} = 0,9; \quad q_{11} = 5, q_2 = 7, q_{22} = 9$ та похибках магнітометра $\Delta h_m = [0,01 \ 0,012 \ 0,014 \ 0,016]$ представлені на рис. 5.12, а результати моделювання рівняння (5.119) за початкових умов $\hat{y}(0) = [0,1; 0,1; 0,1]$ і тих же значеннях параметрів ШСЗ і умов його руху, що й на рис. 5.12, та похибках ДКШ $\Delta\omega = -[0,06 \ 0,07 \ 0,08]$ представлені відповідно на рис. 5.13.

Як бачимо з рис. 5.10, похибка e_{x0} спостереження стану x_0 досягає стійкого значення 0,01 на 8-й хвилині, похибка e_{x1} досягає стійкого значення 0,012 на 14-й хв., похибка e_{x2} досягає стійкого значення $-0,01$ на 17-й хв., похибка e_{x3} досягає стійкого значення $-0,012$ на 21-й хв.

З рис. 5.11 видно, що похибка e_{y1} спостереження стану y_1 стає рівною $-0,01$ на 15-й хвилині, похибка e_{y2} досягає величини 0,01 на 20-й хв., e_{y3} дорівнює величині $-0,012$ на 24-й хв.

З рис. 5.12 очевидно, що спостереження \hat{x}_0 стає рівним 0,01 на 17-й хвилині, \hat{x}_1 стає рівним 0,012 на 18-й хв., \hat{x}_2 стає рівним 0,014 на 13-й хв., \hat{x}_3 стає рівним 0,016 на 12-й хв.

Спостереження $\hat{y}(t)$ за вектором y на рис. 4.13 досягає значень $-0,06; -0,07; -0,08$ відповідно на 0,23; 0,15 та 0,08 хвилинах.

І нарешті результати моделювання рівнянь (5.88), (5.89) при тих же значеннях параметрів ШСЗ і умов його руху, що й на попередніх малюнках, та початкових умовах $x(0) = [0,1; 0,1; 0,1; 0,1], \quad y(0) = [0,1; 0,1; 0,1]$ представлені відповідно на рис. 5.14, 5.15.

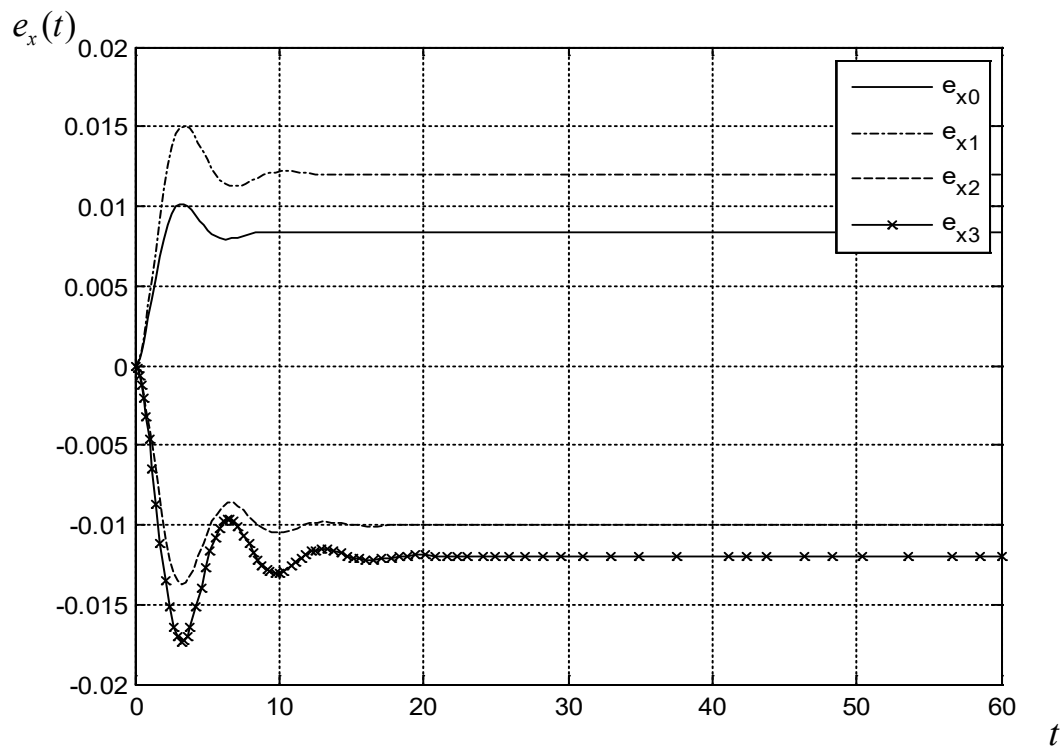


Рис 5.10. Похибка e_x спостереження стану x при початкових умовах

$$e_x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0], t \in [0; 60].$$

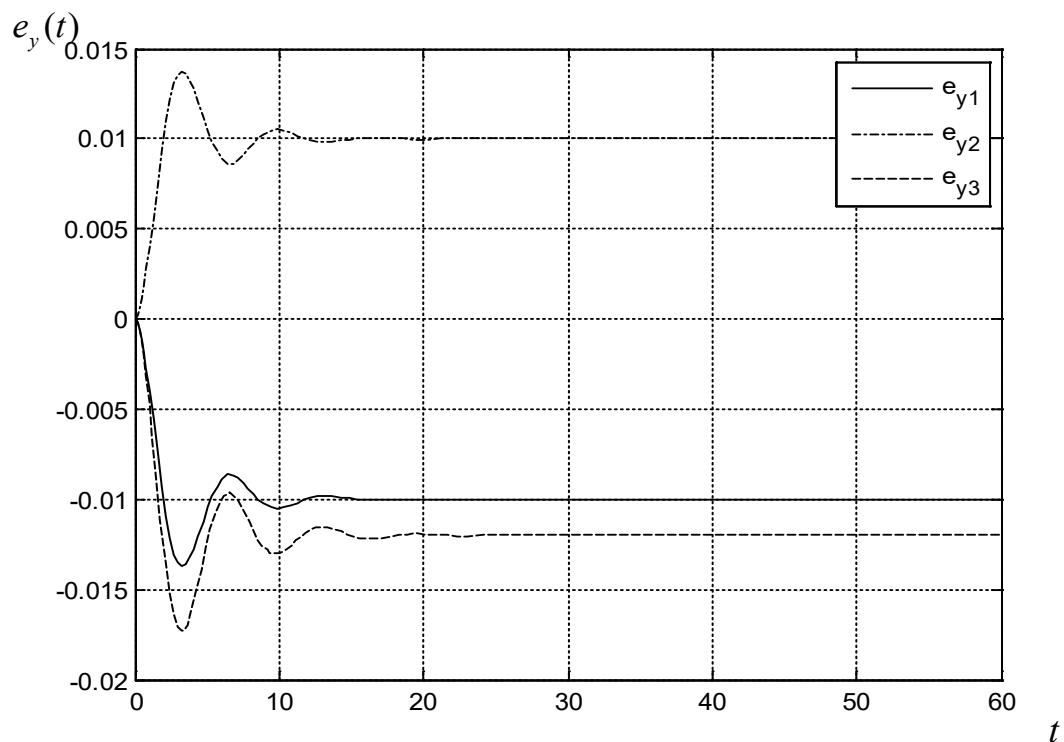


Рис 5.11. Похибка e_y спостереження стану y при початкових умовах

$$e_y(0) = [0 \ 0 \ 0], t \in [0; 1].$$

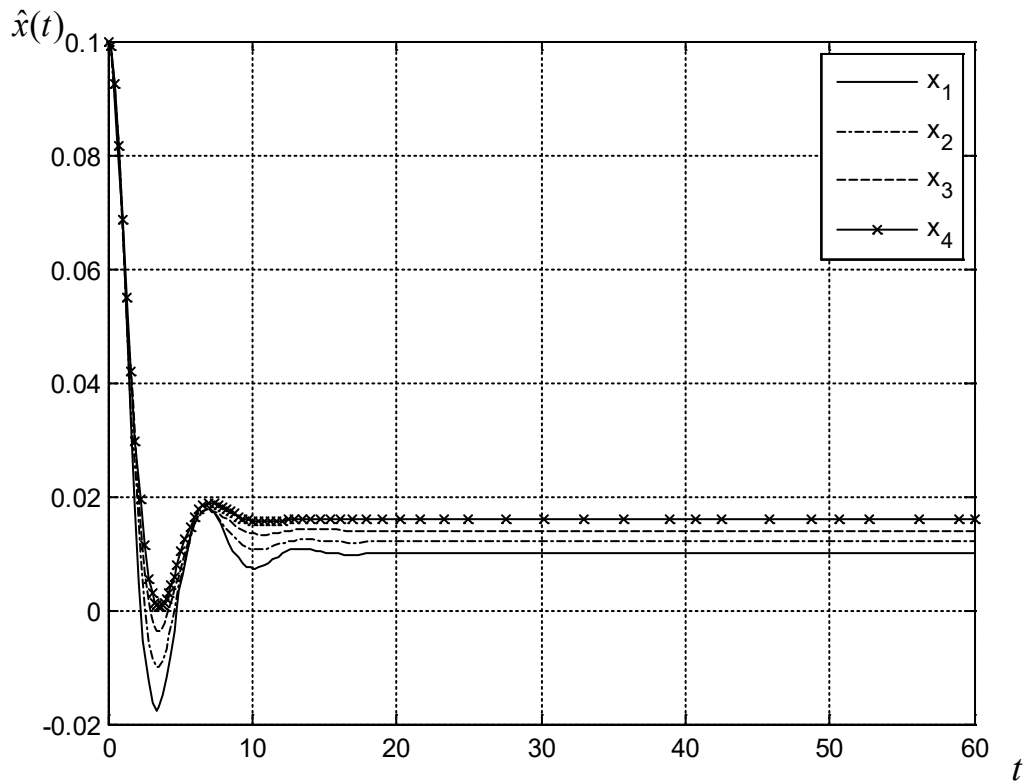


Рис 5.12. Спостереження $\hat{x}(t)$ за вектором x при початкових умовах

$$\hat{x}(0) = [0,1; 0,1; 0,1; 0,1]$$

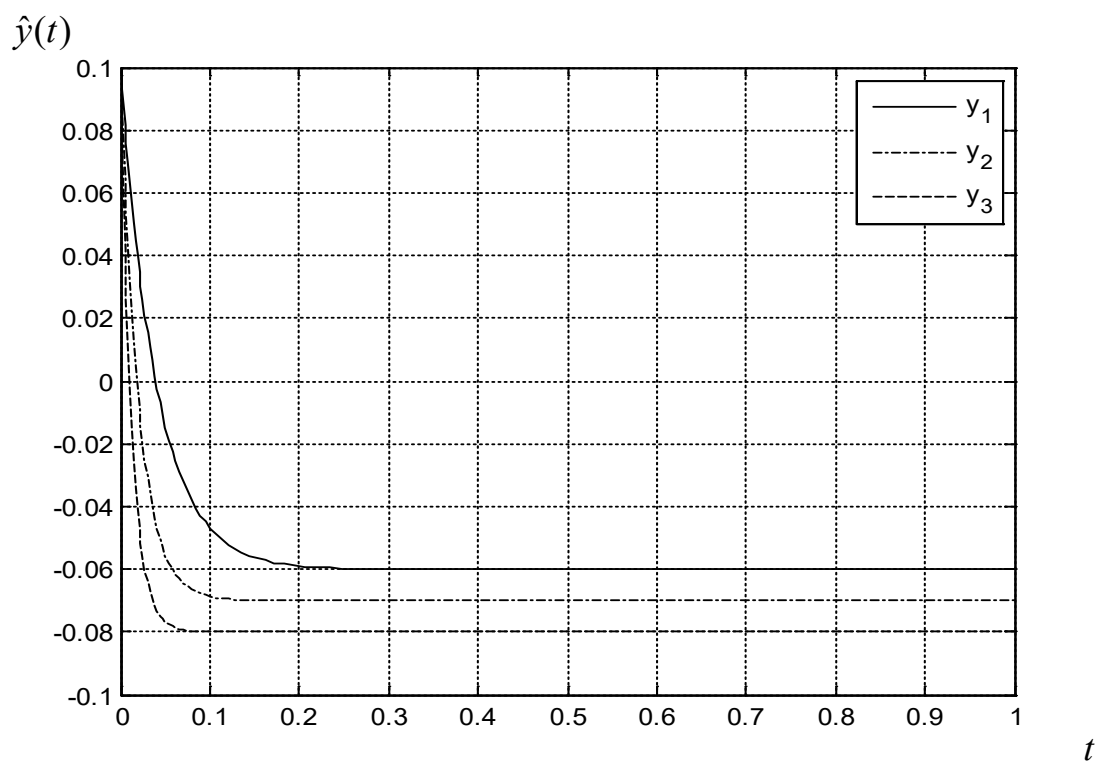


Рис 5.13. Спостереження $\hat{y}(t)$ за вектором y при початкових умовах

$$\hat{y}(0) = [0,1; 0,1; 0,1]$$

$x(t)$

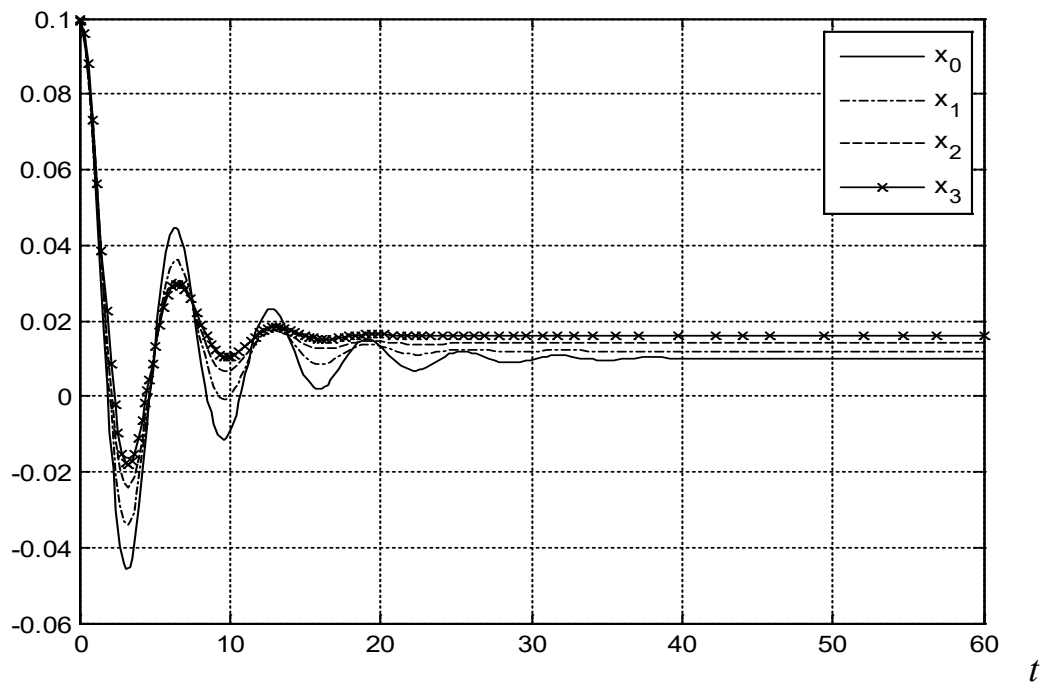


Рис. 5.14. Стабілізація руху ШСЗ із застосуванням оцінки $\hat{x}(t)$ в регуляторі при початкових умовах $x(0)=[0,1; 0,1; 0,1; 0,1]$.

$y(t)$

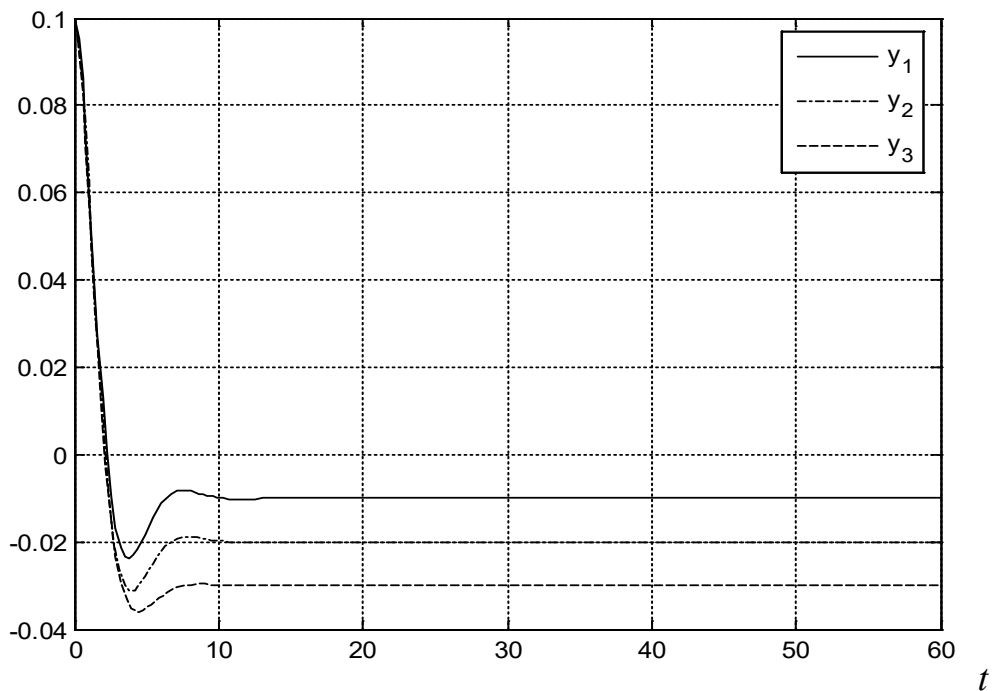


Рис. 5.15. Стабілізація руху ШСЗ із застосуванням оцінки $\hat{y}(t)$ в регуляторі при початкових умовах $y(0)=[0,1; 0,1; 0,1]$.

З рис. 5.14 бачимо, що відхилення x_0 досягає величини 0,01 на 38-й хвилині, відхилення x_1 досягає 0,012 на 31-й хв., x_2 досягає 0,014 на 23-й хв. і x_3 досягає 0,016 на 21-й хв.

З рис. 5.15 видно, як відхилення руху ШСЗ y досягає значень $-0,01$; $-0,02$; $-0,03$ відповідно на 13-й, 10-й, 9-й хвилинах, тобто на 8,4; 9,64 та 8,84 хвилини пізніше, ніж відхилення кутової швидкості ШСЗ без спостереження, коли в регуляторі використовуються точні значення похибок системи (досить його порівняти з рис. 5.7 – 5.9).

Отже, як засвідчує рис. 5.15, якість стабілізації супутника із спостережником у середньому на 28 % гірша за якість його стабілізації при застосуванні в регуляторі точних значень відхилень його кутових швидкостей.

Основні результати розділу 5 викладені в роботах автора [11, 106, 173, 176, 177].

5.17. Висновки до розділу 5

У п'ятому розділі можна відмітити такі результати:

1. Повністю реалізовано структуру САПР розв'язання задачі стабілізації штучного супутника Землі.
2. Побудовано стабілізуюче управління супутником 6-м методом ПЖС НСС.
3. Виконано оптимізацію його стабілізуючого управління шляхом вкладення матриці підсилення стабілізуючого управління в структуру матриці підсилення оптимального управління із забезпеченням їх рівності ідентифікацією довільних матриць Q , S , D .
4. Моделювання кутового руху супутника обумовило такі висновки:
 - ❖ Застосування запропонованого оптимального управління (5.47) сприяє підвищенню точності стабілізації ШСЗ і мінімізує квадратичний критерій якості О.А. Красовського.
 - ❖ Отримане оптимальне управління забезпечує стабілізацію системи значно раніше (відхилення кутової швидкості ω_1 досягає значення $\omega_{s1} = -0,01$ вже на 1-й секунді (рис 5.8), відхилення кутової

швидкості ω_2 досягає значення $\omega_{s2} = -0,02$ на 0,26 секунди (рис.5.9), відхилення кутової швидкості ω_3 досягає значення $\omega_{s3} = -0,03$ на 0,09 секунди (рис.5.10), тоді як при неоптимальному стабілізуючому управлінні відхилення кутової швидкості ω_1 досягає значення $\omega_{s1} = -0,01$ на 4,6 секунди (рис.5.8), відхилення кутової швидкості ω_2 досягає значення $\omega_{s2} = -0,02$ на 0,36 секунди (рис.5.9), відхилення кутової швидкості ω_3 досягає значення $\omega_{s3} = -0,03$ на 0,16 секунди (рис.5.10)).

❖ Оптимальне керування підвищує якість стабілізації ШСЗ в середньому на 30 %.

5. Запропоновано та розроблено САПР стабілізації спостерігача стану штучного супутника Землі.
6. Розглянуто основні способи розв'язання задач спостереження нелінійних об'єктів та шостим алгоритмом ПЖС НСС розв'язано задачу стабілізації спостерігачів стану нелінійних систем в умовах невизначеності.
7. Побудовано асимптотично стійкий спостерігач стану ШСЗ за магнітометричною інформацією і інформацією з ДКШ в умовах невизначеності та досліджено стабілізацію ШСЗ з використанням цієї інформації.
8. Моделювання похибок спостереження стану штучного супутника Землі обумовило такі висновки:
 - ❖ Методи ПЖС НСС дозволяють розв'язувати не лише задачі синтезу систем стабілізації, але й задачі спостереження.
 - ❖ З рис. 5.15 видно, як відхилення руху ШСЗ y (у кутових швидкостях) досягає значень $-0,01$; $-0,02$; $-0,03$ відповідно на 13, 10, 9 хвилинах, тобто на 8,4; 9,64 та 8,84 хвилини пізніше, ніж відхилення кутової швидкості ШСЗ без спостереження, коли в регуляторі використовуються точні значення похибок системи.

- ❖ Якість стабілізації супутника із спостережником у середньому на 28 % гірша за якість його стабілізації при застосуванні в регуляторі точних значень відхилень його кутових швидкостей.

Результати даного розділу використані в публікаціях у наукових журналах [11, 106, 173, 176, 177].

Список публікацій здобувача:

1. Малоєд М.М. Оптимальна стабілізація супутника / М.М. Малоєд // Проблеми інформатизації та управління. К.: НАУ . – № 3(35). – 2011. – С. 68–76.
2. Малоєд М.М. Побудова оптимального управління супутником / М.М. Малоєд, С.М. Онищенко // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 21-22 листопада 2011 р., м. Київ. – К.: НАУ, 2011. – С. 75.
3. Малоєд М.М. Спостереження стану штучного супутника Землі «Січ-2» / М.М. Малоєд, С.М. Онищенко // Збірка доповідей ІХ Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки» / 17-18 квітня 2013 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2013. – С. 112 – 121.
4. Малоєд М.М. Дослідження проблеми спостереження стану штучного супутника Землі / М.М. Малоєд // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 17-19 листопада 2014 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2014. – С. 85.
5. Малоєд М.М. Дослідження проблеми спостереження вектора стану нелінійної динамічної ситеми / М.М. Малоєд // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 21-23 листопада 2018 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2019. – С. 42.

ВИСНОВКИ

У процесі виконання досліджень отримані нові наукові результати, які можна використовувати для підвищення точності стабілізації нелінійних об'єктів шляхом автоматизованого проектування структури оптимальних за квадратичним критерієм якості їх регуляторів, синтезованих методами прямого жорсткого синтезу стабілізованих систем.

Основні результати роботи такі:

1. Запропонована нова структура САПР розв'язання задачі стабілізації нелінійних об'єктів, яка за рахунок використання блоків стабілізації та оптимізації регулятора підвищує ефективність розв'язання задач оптимальної стабілізації нелінійних систем.
2. Вперше одержана і досліджена процедура реалізації шостого методу ПЖС НСС з верхньою матрицею коефіцієнтів квадратичної форми – функції Ляпунова. Його застосування до стабілізації математичного маятника та АРП в розд.4 і до стабілізації нелінійної математичної моделі руху штучного супутника Землі (ШСЗ) в розд.5 показали високу ефективність цього методу при синтезі стабілізуючого керування нелійними об'єктами.
3. Застосування вперше запропонованої та розробленої в роботі процедури оптимізації методів ПЖС сприяє підвищенню точності стабілізації нелінійних систем і мінімізує квадратичний критерій якості О. А. Красовського.
4. Шостим алгоритмом методу ПЖС побудовано структуру стабілізуючого регулятора для математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегральним керуванням і вперше виконана оптимізація цього регулятора, що покращує якість стабілізації математичного маятника загалом на 25 %.
5. Порівняно з оптимальним стабілізуючим управлінням М.М. Красовського, побудованого для цього ж маятника, але в лінійному

наближенні, синтезований в дисертаційній роботі оптимальний регулятор для нелінійного варіанту покращує якість стабілізації математичного маятника в середньому на 50 %.

6. Вперше розв'язано задачу стабілізації вихідної напруги АРП, за рахунок синтезованого шостим методом ПЖС НСС закону управління, що доводить доцільність застосування знайденого закону управління з метою одержання постійної заданої напруги на виході АРП.
7. Вперше знайдено стабілізуючий закон управління орієнтацією ШСЗ шостим методом ПЖС та виконано оптимізацію процесу стабілізації ШСЗ за квадратичним критерієм якості О.А. Красовського. Математичне моделювання руху супутника з оптимальним та неоптимальним стабілізуючим управлінням в середовищі MatLab показало, що його оптимальне управління підвищує якість стабілізації в середньому на 30 %.
8. Вперше побудовано асимптотично стійкий спостерігач стану ШСЗ за магнітометричною інформацією і за інформацією з датчика кутової швидкості в умовах невизначеності та досліджено стабілізацію ШСЗ з використанням цієї інформації. Моделювання похибок спостереження стану штучного супутника Землі показало, що якість стабілізації супутника із спостережником у середньому на 28 % гірша за якість його стабілізації при застосуванні в регуляторі точних значень відхилень його кутових швидкостей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Онищенко С.М. Анализ прямых методов жесткого синтеза систем стабилизации / С.М. Онищенко – Киев, 1997. – 79с. – (Препр. / НАН Украины, Ин-т математики: 97.12).
2. Сусол М.Н. Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к нелинейным объектам / С.М. Онищенко, Н.П. Коваленко, М.Н. Сусол // Проблеми інформатизації та управління. – К.: НАУ. – 2005. – Вип. 2(13). – С. 73 – 77.
3. Сусол М.Н. К проблеме стабилизации нелинейных систем / М.Н. Сусол // Материалы V Международной НТК "Гиротехнологии, навигация и управление движением". К.: – НТУУ "КПИ". – 2005. – С. 327 – 334.
4. Сусол М.Н. Анализ алгоритмов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / О.Л. Клименко, Н.П. Коваленко, С.М. Онищенко, М.М. Сусол // Проблемы управления и информатики. – 2006. – №4 – С. 30 – 39.
5. Сусол М.Н. Анализ методов прямого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / О.Л. Клименко, Н.П. Коваленко, С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // Материалы VIII Крымской международной математической школы. "Метод функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь: НТУ. – 2006. – С. 80.
6. Сусол М.Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / С.М. Онищенко, М.Н. Сусол // Тезисы международной конференции "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" / 22 – 25 мая, 2007 г.. – К.: КНУ. – 2007. – С. 76.
7. Малоед М.Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных динамических систем / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Збірка доповідей VII Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки» / 23-24 квітня 2009 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2009. – С. 145 – 151.
8. Малоед М.М. Стабілізація нелінійних систем оптимальними методами прямого жорсткого синтезу / М.М. Малоед, С.М. Онищенко // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем / Зб. Праць Ін-ту математики НАН

України. – 2009. – Т.6, №3. – С. 169 – 177.

9. Малоед М.Н. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Проблемы аналитической механики / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т.7, №3. – С. 330 – 344.

10. Малоед М.Н. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем положении равновесия / М.Н. Малоед, С.М. Онищенко // Тезисы международной конференции “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” / 25 – 27 мая, 2011 г. – К.: КНУ. – 2011. – С. 375.

11. Малоед М.М. Побудова оптимального управління супутником / М.М. Малоед, С.М. Онищенко // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 21-22 листопада 2011 р., м. Київ. – К.: НАУ, 2011. – С. 75.

12. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем: [Учебн. пособие для вузов.] / И.П. Норенков – М.: Высш. шк., 1986. – 304 с.

13. Романец Ю.В. Защита информации в компьютерных системах и сетях / Ю.В. Романец, П.А. Тимофеев, В.Ф. Шаньгин. – М.: Радио и связь, 2001. – 376 с.

14. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.

15. Летов А.М. Выбор оптимизирующего функционала в проблеме аналитического конструирования / А.М. Летов // Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Оптимальные системы. – М.: Наука. – 1967. – С. 14 – 21.

16. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов / А.М. Летов // Автоматика и телемеханика. Ч. I – 1960. – 21, № 4. – С. 435 – 441; Ч. II. – 1960. – 21, № 5. – С. 561 – 568; Ч. III – 1960. – 21, № 6. – С. 661 – 665; Ч. IV. – 1961. – 22, № 4. – С. 425 – 435; Ч. V: – 1962. – 23, №11. – С. 1405 – 1413.

17. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / Н.Н. Красовский // Дополнение IV к книге И.Г. Малкина "Теория устойчивости

движения" – М.: Наука. – 1966. – С. 457 – 514.

18. Летов А.М. Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления / А.М. Летов // Дифференциальные уравнения. – 1970. – 6, № 4 – С. 592 – 615.

19. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация / В.Д. Фурасов. – М.: Наука. – 1977. – 248 с.

20. Зубов В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука. – 1975. – 200 с.

21. Зубов В.И. Теория оптимального управления / В.И. Зубов. – Л.: Судостроение. – 1966. – 351 с.

22. Гельднер К. Нелинейные системы управления / К. Гельднер, С. Кубик [Перевод с нем. С.П. Забродина]. – М.: Мир, 1987. – 367 с.

23. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова / Е.А. Барбашин – М.: Наука, 1970. – 240 с.

24. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976 – 424с.

25. Онищенко С.М. Жесткая монотонная стабилизация решений нелинейных дифференциальных уравнений прямым методом Ляпунова / С.М. Онищенко // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 55 – 62.

26. Онищенко С.М. Обобщенный модальный подход к задачам синтеза нелинейных систем стабилизации / С.М. Онищенко - Киев, 1997. – 56с. (Препр. / НАН Украины, Ин-т математики: 97.1)

27. Hahn W. Stability of motion / W. Hahn. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 408 р.

28. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М.: Мир, 1980. – 302с.

29. Малкин А.Г. Теория устойчивости движения / А.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966. – 532с.

30. Мартынюк А. А. Практическая устойчивость движения / А. А. Мартынюк. – Киев. : Наук. Думка, 1983. – 248 с.

31. Якубович Е.Д. О построении оптимального управления, осуществляющего экспоненциальную стабилизацию линейных систем / Е.Д.Якубович // Докл. АН СССР. – 1973. – № 3. – С. 179 – 181.
32. Якубович Е.Д. О синтезе систем управления с заданной экспоненциальной оценкой затухания переходного процесса / Е.Д.Якубович// Автоматика и телемеханика. – 1970. – № 9. – С. 151 – 155.
33. Якубович Е.Д. Экспоненциальная стабилизация линейных систем / Е.Д.Якубович // Докл. АН СССР. Сер. Математика, физика. – 1969. – 186, №1. – С. 47 – 49 .
34. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory / S. Barnett, R.G.Cameron. – Oxford: Glarendon Press., (second edith.). – 416 p.
35. Barnett S. Asymptotic stability of non-linear systems / S. Barnett, C. Storey // Electronics Letters. – 1966. – 2. – P. 47 – 53.
36. Онищенко С.М. Синтез регуляторов прямым методом Ляпунова для нелинейных систем жесткой стабилизации / С.М. Онищенко. – Киев, 1991. – 60с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 91.17).
37. Зубер И.Е. О монотонной стабилизации линейных импульсных систем регулирования / И.Е. Зубер // Автоматика и телемеханика. – 1968. – № 3. – С. 50 – 60.
38. Зубер И.Е. К вопросу об оптимальной структуре обратных связей монотонно стабилизированной импульсной системы / И.Е. Зубер // Управляемые системы. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР. 1969. – Вып.3. – С. 25 – 32.
39. Зубер И.Е. О структуре обратных связей монотонно стабилизированной импульсной системы / И.Е. Зубер // Автоматика и телемеханика. – 1969. – № 2. – С. 43 – 51.
40. Мейлахс А.М. Немодальный подход к задаче стабилизации нелинейных регулируемых систем / А.М. Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1990. № 4. – С. 22 – 27.
41. Мейлахс А.М. О монотонной стабилизации линейных систем регулирования / А.М. Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1973. № 3. – С.

179 – 181.

42. Мейлахс А.М. О монотонной стабилизации линейных регулируемых систем / А.М. Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 7. – С. 38 – 44.
43. Мейлахс А.М. О синтезе устойчивых систем регулирования при параметрических возмущениях / А.М. Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1978, № 10. – С. 5 – 16.
44. Мейлахс А.М. О стабилизации линейных регулируемых систем / А.М.Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1982, № 6. – С. 54 – 59.
45. Пятницкий Е.С. Синтез нелинейных систем управления на ЭВМ / Е.С.Пятницкий // Динамика нелинейных процессов управления. – Таллин: АН ЭССР, 1987. – С. 108 – 109.
46. Яковлев О.С. Аналитический синтез регуляторов для нелинейных систем n -го порядка / О.С. Яковлев // Кибернетика и вычислит. техника. – 1976. – Вып.31. – С. 54 – 61.
47. Яковлев О.С. Аналитическое конструирование регуляторов для нелинейных систем второго порядка / О.С. Яковлев // Кибернетика и вычислит. техника. – 1972. – Вып. 13. – С. 82 – 90.
48. Яковлев О.С. Аналітичний синтез нелінійного регулятора для систем третього порядку / О.С. Яковлев // Автоматика. – 1971. № 5. – С. 14 – 22.
49. Яковлев О.С. Интегральная оценка качества эргатических систем / О.С. Яковлев // Кибернетика и вычислит. техника. – 1984. – Вып.61. – С. 3 – 7.
50. Яковлев О.С. О некоторых детерминантных тождествах / О.С. Яковлев // Укр. мат. журн. – 1974. – № 3. – С. 422 – 427.
51. Яковлев О.С. Синтез нелинейных законов обратной связи / О.С. Яковлев // Докл. АН СССР. – 1980. – 254, № 4. – С. 827 – 830.
52. Яковлев О.С. Эргатические системы стабилизации / О.С. Яковлев // Технические эргатические системы [под. общ. ред. В.В. Павлова.] – Киев: Высш.шк., 1977. – С. 178 – 259.
53. Дубров А.М. Синтез экспоненциально устойчивых систем управления для некоторого класса нелинейных объектов / А.М. Дубров, И.Е. Зубер // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 8. – С. 33 – 40.

54. Калман Р.Е. Новые результаты в теории линейной фильтрации и упреждения / Р.Е. Калман, Р.С. Бьюси // Тр. американ. о-ва инженеров-механиков. Сер. Д. – 1961. – № 1. – С. 34 – 45.
55. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
56. Мейлахс А.М. О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности / А.М. Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 2. – С. 182 – 184.
57. Мейлахс А.М. О стабилизации нелинейных систем автоматического регулирования / А.М. Мейлахс // Автоматика и телемеханика. – 1976. № 6. – С. 176 – 179.
58. Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов / В.И. Зубов – Л.: Судостроение, 1980. – 256 с.
59. Зубов В.И. Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений / В.И. Зубов // Прикл. математика и механика. – 1953. – 17, вып.4. – С. 506 – 508.
60. Ku Y.H. Lyapunov function of a fourth-order system / Y.H. Ku // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1964. – 9, N 3. – P. 276 – 278.
61. Ku Y.H. Lyapunov function of high-order system / Y.H. Ku // Proc. IEEE. – 1966. – 54, N 11. – P. 1620 – 1622.
62. Ku Y.H. Stability and design of nonlinear control systems via Lyapunov's criterion / Y.H. Ku, R. Mekel, C.C. Su // IEEE Internat. Convent. Rec. – 1964. – 12, N 1. – P. 10 – 12.
63. Ku Y.H. On Lyapunov functions of high order nonlinear systems / Y.H. Ku, N.N. Puri // J.Franklin Inst. – 1963. – 276, N 5. – P. 423 – 425.
64. Johnson G.W. Synthesis of control systems with stability constraints via the direct method of Lyapunov / G.W. Johnson // Preprints Joint Automatic Control Conf., 1964.
65. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

66. Онищенко С.М. Модальный подход к синтезу нелинейных систем стабилизации / С.М. Онищенко // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 6. – С. 5 – 19.
67. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М.: Мир, 1980. – 454 с.
68. Онищенко С.М. Жесткая монотонная стабилизация нелинейных систем прямым методом Ляпунова / С.М. Онищенко // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1991. – № 4. – С. 35 – 38.
69. Онищенко С.М. Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза / С.М. Онищенко // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 3. – С. 17 – 25.
70. Онищенко С.М. Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза линейных канонических систем стабилизации / С.М. Онищенко // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 4. – С. 50 – 59.
71. Онищенко С.М. Об условиях стабилизируемости в методах жесткого синтеза систем стабилизации / С.М. Онищенко // Вопросы аналитической механики и ее приложений / Пр. Институту математики НАН України. Т. 26. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 257 – 276.
72. Онищенко С.М. Анализ алгоритмов жесткого синтеза систем стабилизации / С.М. Онищенко, Е.Л. Клименко // Проблеми інформатизації та управління. – К. НАУ, 2005. – Вип. 3(14). – С. 111 – 116.
73. Кузьмин П.А. Малые колебания и устойчивость движения / П.А. Кузьмин. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
74. Moore R.E. Interval analysis / R.E. Moore. – New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1966. – 145 p.
75. Воронин А.Н. Методы оценки технических эргатических систем / А.Н. Воронин // Технические эргатические системы [под общ. ред. В.В. Павлова]. – Киев: Вищ. шк., 1977. – С. 101 – 140.
76. Сусол М.Н. Анализ условий стабилизируемости нелинейных систем шестым алгоритмом синтеза / М.Н. Сусол // Матеріали Міжнародної наукової

- конференції студентів та молодих учених „Політ-2006”. – К:НАУ. – 2006. – С. 200.
77. Ларин В.Б. О корректировании работы системы инерциальной навигации / В.Б. Ларин, А.А. Туник // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 4. – С. 148 – 156.
78. Ларин В.Б. О выборе программной траектории движения составного колесного экипажа / В.Б. Ларин // Прикладная механика. – Киев: ТОО «А.С.К», 2010. – 46, № 3. – С. 94 – 101.
79. Алиев Ф.А. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) / Ф.А. Алиев, В.Б. Ларин // Прикладная механика. – Киев: ТОО «А.С.К», 2011. – 47, № 3. – С. 3 – 49.
80. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977 – 650 с.
81. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А.А. Красовский – М.: Наука, 1973. – 560 с.
82. Малоед М.Н. Методы жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации и их аддитивная оптимизация / М. Н. Малоед // Материалы X Международной конференции (5 – 10 июня 2008 года) «Устойчивость, управление и динамика твердого тела». – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ. – 2008. – С. 135 – 136.
83. Малоед М.Н. Жесткие методы оптимальной стабилизации нелинейных систем / М.Н. Малоед // Материалы IX Крымской Международной математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Таврический национальный ун-т. – Симферополь. – 2008. – С. 111.
84. Малоед М.М. Адитивна оптимальна стабілізація нелінійних систем методами жорсткого синтезу / М.М. Малоед // Автоматика-2008: доповіді XV міжнародної конференції з автоматичного управління, 23 – 26 вересня 2008 р. – Одеса: ОНМА. – С. 858 – 861.
85. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики / Кильчевский Н.А. – Т. 1. М.: Наука, 1977. – 480 с.
86. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли / Е.П.

Аксенов. – М.: Наука, 1977 – 220 с.

87. Талызин Н.В. Спутники связи - Земля и Вселенная / Н.В. Талызин. – М.: Наука, 1977 – 140 с.

88. Ориентация и стабилизация [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://astronaut.ru/bookcase/books/kamanin5/text/13.htm>. – Заголовок с экрана.

89. Волосов В.В. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Часть 1 / В.В. Волосов, И.А. Куценко, В.И. Попадинец // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 1. – С. 101 – 116.

90. Dodds S.J. Sliding-mode control for the three-axis attitude control of rigid-body spacecraft with unknown dynamics parameters / S.J. Dodds, A.V. Walleer // International Journal of Control. – 1991. – 54. – P. 737 – 761.

91. Лебедев Д.В. Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов / Д.В. Лебедев, А.И. Ткаченко – К.: Наук. думка, 2006. – 300 с.

92. Hamilton W.R. Lession on quaternions / W. R. Hamilton. – Holdes and Smith, 1853. – 382 p.

93. Hamilton W.R. Elements of quaternions / W. R. Hamilton. – New York: Chelsea publ. co, 1969. – 369 p.

94. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский – М.: Изд-во «Наука», 1973. – 320 с.

95. Голдстейн Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. – М.:Наука, 1975. – 415 с.

96. Лурье А И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М.:Физматгиз, 1961. – 824 с.

97. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы / С.М. Онищенко. – К.: Наукова думка, 1983. – 208 с.

98. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

99. Абалакин В.К. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин, Е.П. Аксенов. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
100. Волосов В.В. Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения / В.В. Волосов, М.В. Хлебников, В.Н. Шевченко // Проблемы управления и информатики.– 2011. – №2. – С. 114 – 121.
101. Волосов В.В. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Часть 2 / В.В. Волосов, И.А. Куценко, В.И. Попадинец // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 3. – С. 109 – 116.
102. Плохотников К. Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB. Учебное пособие для вузов / К. Э. Плохотников. – М. : Горячая линия – Телеком, 2009. – 496 с.
103. Прокопенко І. Г. Основи комп'ютерного проектування та моделювання РЕЗ: [Конспект лекцій.] / І. Г. Прокопенко, А. А. Семенов, Г. І. Красноружев. – Кривий Ріг: ККНАУ, 2007. – 84 с.
104. Банди Б. Методы оптимизации / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988г., – 128 с.
105. Малоєд М.М. Оптимізація стабілізуючого управління математичним маятником / М.М. Малоєд // Електроніка та системи управління. – К.: НАУ – 2011. – №1(27). – С. 78 – 83.
106. Малоєд М.М. Оптимальна стабілізація супутника / М.М. Малоєд // Проблеми інформатизації та управління. К.: НАУ. – 2011. – Вип.3(35). – С. 68 – 76.
107. Kalman R. Contributions to the Theory of Optimal Control / R. Kalman // Bull. Soc. Mat. Mech. – 5. – 1960.
108. Шмидт Дж. Лине́йные и нели́нейные методы фильтрации / Дж. Шмидт // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах [под ред. К.Т. Леондеса]. – М.: Мир, 1980. – С. 49 – 73.

109. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний / И.Е. Казаков. – М.: Наука, 1975. – 423 с.
110. Сейдж Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
111. Бревер Г. Идентификация характеристик шума в фильтре Калмана / Г. Бревер // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах [под ред. К.Т. Леондеса]. – М.: Мир, 1980. – С. 321–376.
112. Стратонович Р.Л. Условные процессы Маркова / Р.Л. Стратонович // Теория вероятностей и ее применения. 1960, **5**, вып. 2. – С. 172–195.
113. Браммер К. Фильтр Калмана-Бьюси / К. Браммер, Г. Зиффлинг. – М.: Наука. – 1982. 200 с.
114. Дмитриев С.П. Нелинейные задачи обработки навигационной информации / С.П. Дмитриев, Л.И. Шимилевич. – Л.: ЦНИИ «Румб», 1977. – 85 с.
115. Jazwinski A.H. Stochastic processes and filtering theory / A.H. Jazwinski. – New York: Academic Press, 1970. – 302 p.
116. Ватсэл С. Определение ориентации КЛА с помощью нелинейного фильтра второго порядка / С. Ватсэл // Аэрокосмич. техника. – 1988. – № 7. – С. 100–108.
117. Воротников В.И. Об оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем / В.И. Воротников. – Автоматика и телемеханика. – 1991. - № 3. – С. 22–34.
118. Bass R.S. Optimal multichannel nonlinear filtering / R.S. Bass, V.D. Norum, L. Schwarz // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1966. – **16**. – P. 152–164.
119. Bucy R.S. Nonlinear filtering theory // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1965. – **AC-10**. – P. 198–209.
120. Bucy R.S. Linear and nonlinear filtering // Proceeding of the IEEE. – 1970. – **58**. – P. 854-864.
121. Bucy R.S. Digital synthesis of nonlinear filtering / R.S. Bucy, K.D. Senne // Automatica. – 1971. – **7**. – P. 287–298.

122. Kushner H.J. Approximation to optimal nonlinear filters / H.J. Kushner // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1967. – **AC-12**. – P. 546–556.
123. Schneider A.H. Kalman filter formulation for transfer alignment of strapdown interval units / A.H. Schneider // Navigation. – 1983. – **30**. – N 1. – P. 72–89.
124. Wonham W.M. Some application of stochastic differential equation to optimal nonlinear filtering / W.M. Wonham // Journal of SIAM Control. – 1965. – ser. A, **2**. – P. 347–369.
125. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления (оптимизация, оценка и управление) / А. Брайсон, Хо Ю-ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
126. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems / R.E. Kalman // Trans. ASME, J. Basic Eng., 1960, **82D**. – P. 34–45.
127. Kalman R.E. New results in linear filtering and prediction theory / R.E. Kalman, R.S. Bucy // Trans. ASME, J. Basic. Eng., 1961, **83D**. – P. 96–108.
128. Bucy R.S. Filtering for stochastic processes, with applications to guidance / R.S. Bucy, P.D. Joseph. – New York: Wiley-Interscience, 1968. – 284 p.
129. Сейдж Э.П. Оптимальное управление системами / Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
130. Васильев В.А. Методы оптимальной фильтрации в системах управления космических аппаратов / В.А. Васильев // Вопросы управления космическими аппаратами [под ред. акад. Б.Н. Петрова]. – М.: Мир, 1975. – С. 58–94.
131. Merha R.K. Linear smoothing using measurements containing correlated noise with an application to inertial navigation / R.K. Merha, A.E. Bryson // IEEE Trans. on Autom. Control, 1968, **AC-13**, N 5. – P. 496–517.
132. Neal S.R. Nonlinear estimation techniques / S.R. Neal // IEEE Trans. on Autom. Control, 1968, **AC-13**, N 6. – P. 705–708.
133. Rhodes I.B. A tutorial introduction to estimation and filtering / I.B. Rhodes // IEEE Trans. on Autom. Control, 1971, **AC-16**, N 6. – P. 688–706.
134. Соренсон Г. Обзор методов фильтрации и стохастического управления в динамических системах / Г. Соренсон // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах [под ред. К.Т. Леондеса]. – М.: Мир, 1980. – С. 377–403.

135. Лидов М.Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов / М.Л. Лидов // Космические исследования. – 1964. – 2, №5. – С. 713–715.
136. Лидов М.Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения / М.Л. Лидов // Космические исследования. – 1986. – 24, №2. – С. 246–276.
137. Репин В.Г. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем / В.Г. Репин, Г.П. Тартаковский. – М.: Сов. радио, 1977. – 432 с.
138. Knoll A. Estimation of local vertical and orbital parameters for an earth satellite using horizon sensor measurement / A. Knoll, M. Edelstein // AJAA J., 1965, 3, N 2. – P. 338–345.
139. Оэп Р.Ф. Адаптивное оценивание с минимальной дисперсией в дискретных линейных системах / Р.Ф. Оэп, А.Р. Стабберуд // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах [под ред. К.Т. Леондеса]. – М.: Мир, 1980. – С. 377–403.
140. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1970. – 252 с.
141. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация / В.Н. Фомин. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
142. Пугачев В.С. Оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых дифференциальными уравнениями / В.С. Пугачев // Докл. Ан УССР, 1978, 241, № 5. – С. 1031–1034.
143. Пугачев В.С. Оценивание состояния и параметров непрерывных нелинейных систем / В.С. Пугачев // Автоматика и телемеханика, 1979, № 6. – С. 63–79.
144. Силуянова И.Д. Оценивание состояния и параметров нелинейных систем при помехе в наблюдениях, отличной от белого шума / И.Д. Силуянова // Автоматика и телемеханика, 1980, № 10. – С. 61–69.

145. Дашевский М.Л. К проблеме существования решений в задачах субоптимального оценивания / М.Л. Дашевский. – Автоматика и телемеханика, 1980, № 12. – С. 29–34.
146. Дашевский М.Л. К расчету коэффициентов уравнений условно оптимальных фильтров / М.Л. Дашевский, И.Д. Силуянова. – Автоматика и телемеханика, 1984, № 10. – С. 66–69.
147. Волосов В.В. Исследование сходимости алгоритмов одного вида наблюдателей состояния дискретных динамических систем с использованием функций Ляпунова / В.В. Волосов, Е.А. Одинцова // Автоматика и телемеханика, 1990, № 12. – С. 41–51.
148. Мук Д.Дж. Оценка и идентификация нелинейных динамических систем / Дж.Д. Мук // Аэрокосмич. техника, 1990, № 2. – С. 44–53.
149. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
150. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
151. Хьюбер П. Робастность в статистике / П.Хьюбер. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
152. Малышев В.В. Оптимизация наблюдения и управления летальных аппаратов / В.В. Малышев, М.Н. Красильщиков, В.И. Карлов. – М.: Машиностроение, 1989. – 302 с.
153. Лидов М.Л. Об одном обобщении задачи о «наихудшей корреляции» / М.Л. Лидов, А.И. Матасов // Космические исследования. – 1989. – 27, №3. – С. 454–456.
154. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
155. Ткаченко А.И. Определение ориентации и калибровка пространственного измерителя угловой скорости с использованием угловой информации / А.И. Ткаченко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983, № 3. – С. 19–23.
156. Лебедев Д.В. Системы инерциального управления / Д.В. Лебедев, А.И. Ткаченко. – Алгоритмические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1991. – 208 с.

157. Богуславский И.А. Робастный алгоритм рекуррентной фильтрации / И.А. Богуславский // Докл. АН СССР. – 1988. – **300**, №6. – С. 1329–1332.
158. Плотников П.К. Влияние погрешностей гироскопического измерителя абсолютной угловой скорости объекта на точность определения его ориентации с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы / П.К. Плотников, Ю.Н. Челноков. – Саратов, 1979. – 16 с. – Деп. в ВИНТИ, № 1345.
159. Джонсон С. Теория регуляторов, приспособляющихся к возмущениям / С. Джонсон // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах [под ред. К.Т. Леондеса]. – М.: Мир, 1980. – С. 253–320.
160. Колобов М.Г. Оценивание состояния динамической системы при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения / М.Г. Колобов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1991, № 1 – С. 108–114.
161. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем / А.П. Крищенко // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1985, № 6. – С. 108–112.
162. Емельянов С.В. Асимптотика допустимых параметрических возмущений в задаче стабилизации неопределенной дискретной системы / С.В. Емельянов, В.В. Живоглядов, С.К. Коровин, С.В. Никитин // Автоматика и телемеханика, 1991, № 7. – С. 41–52.
163. Габасов Р. Конечный алгоритм построения программного решения не полностью определенной линейной задачи оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Автоматика и телемеханика, 1991, № 7, – С. 33–41.
164. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
165. Колотовкин А.В. Гравитационногеомагнитная система управления угловым движением микроспутника / А.В. Колотовкин, Г.Г. Куштейко, В.И. Трискало // 2-а Українська конференція з автоматичного керування «Автоматика-95». Праці. – Львів, 1995. – Т. 5. С. 9–10.
166. Лебедев Д.В. Управление сферическим движением космического аппарата в магнитном поле Земли: ч. I. Информационное обеспечение / Д.В. Лебедев, А.И. Ткаченко // Проблемы управления и информатики. – 1995. – №6. – С. 5–18.

167. Лебедев Д.В. Управление сферическим движением космического аппарата в магнитном поле Земли: ч. II. Информационное обеспечение / Д.В. Лебедев, А.И. Ткаченко // Проблемы управления и информатики. – 1996. – №3. – С. 5–18.
168. Лебедев Д.В. Магнитная система управления угловым движением микроспутника / Д.В. Лебедев, А.И. Ткаченко, Ю.Н. Штепа // Космічна наука і технологія. – 1996. – Т. 2. – № 5-6. – С. 17–25.
169. Hodgart M.S. Gravity gradient and magnetorquing attitude control for low-cost low-Earth orbit satellites: the UOSAT experience / M.S. Hodgart // Proc. of the AIAA / AAS Astrodynamics Conference. – Washington, DC, 1988. – Coll. Tech. Pap. – P. 421–430.
170. Psiaki M.L. Tree-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data / M.L. Psiaki, F. Martel, P.K. Pal // J. Guid., Control and Dynamics. – 1990. – **13**, N 3. – P. 506–514.
171. Ефименко Н.В. Система автономной навигации по магнитному полю Земли / Н.В. Ефименко, А.В. Колотовкин, А.К. Новиков, К.В. Швец, И.А. Пятак // 3-я Українська конференція з автоматичного керування «Автоматика-96». Праці. – Севастополь, 1996. Т. 3. – С. 75–76.
172. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами / А.П. Коваленко. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.
173. Малоед М.М. Спостереження стану штучного супутника Землі «Січ-2» / М.М. Малоед, С.М. Онищенко // Збірка доповідей ІХ Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки» / 17-18 квітня 2013 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2013. – С. 112 – 121.
174. Малоед М.М. Моделювання автоматичного регулятора підсилення / М.М. Малоед // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 28-29 листопада 2012 р., м. Київ. . – К.: НАУ, 2012. – С. 57.
175. Малоед М.Н. Математическое моделирование автоматического регулятора усиления с обратной связью / М.Н. Малоед, И.Г. Прокопенко // Тези доповідей

науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 28-30 листопада 2012 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2012. – С. 77.

176. Малоєд М.М. Дослідження проблеми спостереження стану штучного супутника Землі / М.М. Малоєд // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 17-19 листопада 2014 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2014. – С. 85.

177. Малоєд М.М. Дослідження проблеми спостереження вектора стану нелінійної динамічної ситеми / М.М. Малоєд // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 21-23 листопада 2018 р., м.Київ . – К.: НАУ, 2019. – С. 42.

178. Карачаров К.А. Введение в техническую теорию устойчивости движения. / Карачаров К.А., Пилютик А.Г. – Физматгиз, Москва, 1962, 244 с.

Додаток А

Список публікацій, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Сусол М. Н. Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к нелинейным объектам / С. М. Онищенко, Н. П. Коваленко, М. Н. Сусол // Проблемы інформатизації та управління. К. : НАУ, 2005. – Вип. 2(13). – С. 73–77.
2. Сусол М. Н. К проблеме стабилизации нелинейных систем / М. Н. Сусол // V Международная НТК «Гиротехнологии, навигация и управление движением»: Сборник докладов. К.: НТУУ «КПИ», 2005. – С. 327–334.
3. Сусол М. Н. Анализ алгоритмов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / Е. Л. Клименко, Н. П. Коваленко, С. М. Онищенко, М. Н. Сусол // Проблемы управления и информатики. □ 2006 – №4 – С. 30–39.
4. Сусол М. Н. Анализ методов прямого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / Е. Л. Клименко, Н. П. Коваленко, С. М. Онищенко, М. Н. Сусол // VIII Крымская международная математическая школа. «Метод функций Ляпунова и его приложения». – Симферополь: ТНУ, 2006 – С.80.
5. Сусол М. Н. Анализ условий стабилизируемости нелинейных систем шестым алгоритмом синтеза / М. Н. Сусол // Матеріали Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених «Політ-2006». – К: НАУ. – 2006. – С. 200.
6. Сусол М. Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации / С. М. Онищенко, М. Н. Сусол // Thesis of International Conference “Dynamical System Modeling and Stability Investigation” / May 22 – 25, 2007. – К.: КНУ. – 2007. – С. 76.
7. Малоед М. Н. Методы жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации и их аддитивная оптимизация / М. Н. Малоед // Материалы X Международной конференции (5 – 10 июня 2008 года) «Устойчивость, управление и динамика твердого тела». – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ. – 2008. – С. 135 – 136.
8. Малоед М. Н. Жесткие методы оптимальной стабилизации нелинейных систем / М. Н. Малоед // Материалы IX Крымской Международной математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Таврический национальный ун-т. – Симферополь. – 2008. – С. 111.
9. Малоед М. М. Адитивна оптимальна стабілізація нелінійних систем методами жорсткого синтезу / М. М. Малоед // Автоматика–2008: доповіді XV міжнародної конференції з автоматичного управління, 23 – 26 вересня 2008 р. – Одеса: ОНМА. – С. 858–861.
10. Малоед М. Н. Оптимизация методов жесткого синтеза нелинейных динамических систем / М. Н. Малоед, С. М. Онищенко // Збірка доповідей VII Міжнародної науково-технічної конференції «Гиротехнології, навигация, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки» / 23-24 квітня 2009 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПИ». – 2009. – С. 145 – 151.

11. Малоед М. М. Стабілізація нелінійних систем оптимальними методами прямого жорсткого синтезу / М. М. Малоед, С. М. Онищенко // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6, №3. – С. 169 – 177.
12. Малоед М. Н. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия / М. Н. Малоед, С. М. Онищенко // Проблеми аналітичної механіки / Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т.7, №3. – С. 330 – 344.
13. Малоед М. М. Оптимізація стабілізуючого управління математичним маятником / М. М. Малоед // Електроніка та системи управління. – К. : НАУ – 2011. – №1(27). – С. 78–83
14. Малоед М. М. Оптимальная стабилизация математического маятника в верхнем положении равновесия / М. Н. Малоед, С. М. Онищенко // International Conference “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”: Thesis of Conference Report / May 25 – 27, 2011. – К.: КНУ.– 2011. – С. 375.
15. Малоед М. М. Оптимальна стабілізація супутника / М. М. Малоед // Проблеми інформатизації та управління. К.: НАУ . – № 3(35). – 2011. – С. 68–76.
16. Малоед М. М. Побудова оптимального управління супутником / М. М. Малоед, С. М. Онищенко // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 21–22 листопада 2011 р., м. Київ. – К.: НАУ, 2011. – С. 75.
17. Малоед М. М. Моделювання автоматичного регулятора підсилення / М. М. Малоед // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених і студентів, 28-29 листопада 2012 р., м. Київ. . – К.: НАУ, 2012. – С. 57.
18. Малоед М. Н. Математическое моделирование автоматического регулятора усиления с обратной связью / М. Н. Малоед, И. Г. Прокопенко // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 28-30 листопада 2012 р., м. Київ. – К.: НАУ, 2012. – С. 77.
19. Малоед М. М. Спостереження стану штучного супутника Землі «Січ-2» / М. М. Малоед, С. М. Онищенко // Збірка доповідей ІХ Міжнародної науково-технічної конференції «Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки» / 17-18 квітня 2013 р., м. Київ: – К.: НТУУ «КПІ». – 2013. – С. 112 – 121.
20. Малоед М. М. Дослідження проблеми спостереження стану штучного супутника Землі / М. М. Малоед // Тези доповідей науково-технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 17-19 листопада 2014 р., м. Київ . – К.: НАУ, 2014. – С. 85.
21. Малоед М. М. Дослідження проблеми спостереження вектора стану нелінійної динамічної системи / М. М. Малоед // Тези доповідей науково-

технічної конференції «Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM», 21-23 листопада 2018 р., м. Київ . – К.: НАУ, 2019. – С. 42.

Додаток Б

Акти впровадження результатів дисертаційної роботи